Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 25   23/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Esercizio su Taylor (dal compitino)

$$2(1+2x+y)\,e^{1+2xy}$$

Voglio lo sviluppo di grado 3 in $P_0=(-1,1)$

Scrivo $x=-1+\Delta x \qquad y = 1+\Delta y \quad \Rightarrow$

$$f(x,y) = 2(1-2+2\Delta x+1+\Delta y)\,e^{1+2(-1+\Delta x)(1+\Delta y)} =$$

$$2(-2\Delta x+\Delta y)\,e^{-1+2\Delta x-2\Delta y+2\Delta x\Delta y}$$

$$\frac{2}{e}(-2\Delta x+\Delta y)\,e^{2\Delta x-2\Delta y+2\Delta x\Delta y} =$$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\frac{2}{e}(+2\Delta x+\Delta y)\left(1+2\Delta x-2\Delta y+2\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}\left(2\Delta x-2\Delta y+o(\|\ \|)\right)^2 + o(\|(\Delta x,\Delta y)\|^2)\right) =$$

$$o(\|\ \|^2)$$

$$\frac{2}{e}(+2\Delta x+\Delta y)\left(1+2\Delta x-2\Delta y+2\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}\left(4\Delta x^2+4\Delta y^2-8\Delta x\Delta y\right) + o(\|\ \|^2)\right) =$$

$$\frac{2}{e}(+2\Delta x+\Delta y)\left(1+2\Delta x-2\Delta y-2\Delta x\Delta y+2\Delta x^2+2\Delta y^2+o(\|\Delta x,\Delta y\|^2)\right)$$

$$\frac{1}{e}\Big(+4\Delta x+2\Delta y+8\Delta x^2+4\Delta x\Delta y-8\Delta x\Delta y-4\Delta y^2-8\Delta x^2\Delta y$$

$$-4\Delta x\Delta y^2+8\Delta x^3+4\Delta x^2\Delta y+8\Delta x\Delta y^2+4\Delta y^3+o(\|\Delta x,\Delta y\|^3)\Big)$$

$$= \frac{1}{e}\Big(-4\Delta x + 2\Delta y \underbrace{-4}_{c_{11}} \Delta x \Delta y + 8\Delta x^2 - 4\Delta y^2 + \underbrace{8}_{c_{30}}\Delta x^3$$
$$\underbrace{-4}_{c_{21}} \Delta x^2 \Delta y + \underbrace{4}_{c_{12}} \Delta x \Delta y^2 + 4\Delta y^3 + o(\|\Delta x, \Delta y\|^3)\Big)$$

$$c_{1,1} = -\frac{4}{e} \qquad c_{2,1} = -\frac{4}{e} \qquad c_{1,2} = \frac{4}{e}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = (3,0)!\, c_{3,0} = 6 \cdot \frac{8}{e} = \frac{48}{e}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} = (1,2)!\, c_{1,2} = 2 \frac{4}{e} = \frac{8}{e}$$

Alcune conseguenze della formula di Taylor:

__OSS__ Se $A \subset \mathbb{R}^N$ è convesso, aperto e $f : A \to \mathbb{R}^M$ di classe C^1 su A. Se $\boxed{\| J_f(x) \| \leq L}$ $\forall x \in A$

(se M è una matrice $M \times N$,

$\|M\|$ è la minima costante $c \in \mathbb{R}$ tale che
$$\|Mx\|_{\mathbb{R}^M} \leq c \|x\|_{\mathbb{R}^N}$$
$$\|M\| = \max_{\|x\|_{\mathbb{R}^N}=1} \|Mx\|_{\mathbb{R}^M}$$

(in particolare $\|Mx\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|M\| \, \|x\|_{\mathbb{R}^N}$))

ALLORA f è lipschitziana di costante L, cioè

$$\| f(x) - f(y) \|_{\mathbb{R}^M} \leq L \, \|x - y\|_{\mathbb{R}^N}$$

__Dim.__ Suppongo $M = 1$ ($f : A \to \mathbb{R}$). Siano $x, y \in A$.

Uso Taylor di ordine zero con resto di Lagrange (serve che A sia convesso) centrato in x $\Rightarrow$

$$f(y) = f(x) + \nabla f(\xi)(y - x) \quad \text{con } \xi \text{ sul segmento tra } x \text{ e } y$$

$$|f(x) - f(y)| = |\nabla f(\xi)(y - x)| \leq \|\nabla f(\xi)\|_{\mathbb{R}^N} \|y - x\|_{\mathbb{R}^N}$$

So che $\|\nabla f(\xi)\| \le L \quad \forall \xi \in A$ Dunque

$$|f(x) - f(y)| \le L \|x - y\|_{\mathbb{R}^M}.$$

Nel caso generale si fa nello stesso modo (fidandosi che vale l'analogo formula di Taylor):

$$\underset{\mathbb{R}^M}{\underset{\cap}{f(y)}} = \underset{\mathbb{R}^M}{\underset{\cap}{f(x)}} = \underset{M\times N}{J_f}(\xi)\underset{\mathbb{R}^M}{\underset{\cap}{(y-x)}} \Longrightarrow$$

$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{R}^M} \le \|J_f(\xi)(y-x)\|_{\mathbb{R}^M} \le \|J_f(\xi)\| \, \|y-x\|_{\mathbb{R}^N} \le L \|y-x\|_{\mathbb{R}^N}$$

#

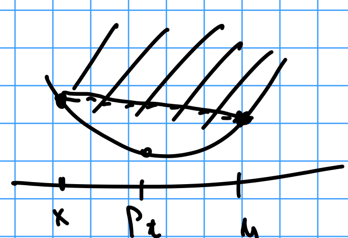
CONVESSITÀ IN PIÙ VARIABILI

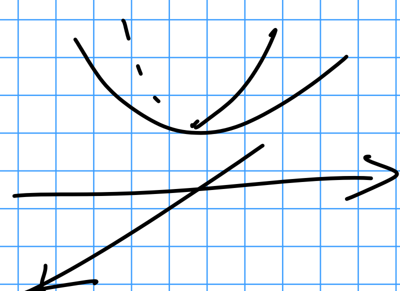
Def. Supponiamo $A \subset \mathbb{R}^N$ sia convesso. Sia $f: A \to \mathbb{R}$. Dico che f è convessa $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in A \quad \forall t \in [0,1]$ si ha $f(\underbrace{tx + (1-t)y}_{p_t}) \le t f(x) + (1-t) f(y)$

SI VEDE CHE QUESTA DEF. è equivalente a dire che

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) : x \in A, \, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) \le y\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

è CONVESSO





FATTI: ① Se f è convessa $\Rightarrow$ f è continua su $\mathring{A}$

(se A è aperto e f è convessa $\Rightarrow$ f è continua)

SUPPONIAMO A aperto

② Se f è $C^1(A)$

(a) f è convessa $\iff$ ∇f è "MONOTONO" cioè

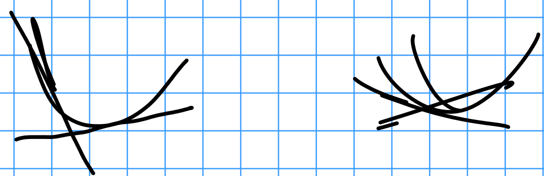
$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))\cdot(x-y) \geq 0$$

(se $N=1$ questo equivale a $(f'(x)-f'(y))(x-y) \geq 0$ cioè f' deb. crescente)

(b) f è convessa $\iff$

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0)}_{\circledast} \qquad \forall x, \forall x_0 \in A$$

grafico f è sempre sopra il grafico del piano tangente



CONSEGUENZA di (2b). Se f è C^1, f convessa

x_0 è pto critico per f $\Rightarrow$ x_0 è pto di minimo assoluto

da $\circledast$ vedo che $f(x) \geq f(x_0)$ $\quad \forall x \in A$

③ Se f è C^2, allora f è convessa $\iff$ $H_f(x) \geq 0$ $\quad \forall x \in A$

Dim $\Leftarrow$ (suppongo $H_f \geq 0$ e dimostro che f è convessa)

Prendo $x, y \in A$ ($x \neq y$ se no ...) Pongo

$$\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) \qquad 0 \leq t \leq 1 \qquad \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$= f(\underbrace{y + t(x-y)}_{\gamma(t)}) = f(y + t\vec{v}) \qquad \underbrace{}_{\gamma'(t) = x-y} \qquad v = x - y$$

GIÀ VISTO che $\varphi'(t) = \nabla f(y+t(x-y)) \cdot (x-y)$

$$\varphi''(t) = (x-y)^t \underbrace{H_f(y+t(x-y))}_{H_f(\xi) \text{ so che è } \geq 0 \ \forall \xi \in A}(x-y) \geq 0 \text{ per ipotesi}$$

Dunque φ è convessa su $[0,1]$

IN PARTICOLARE prendo 1 e 0 e scrivo

$$t = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 0 \Rightarrow \varphi(t) \leq t\varphi(1) + (1-t)\varphi(0)$$

$$\Longrightarrow \quad f(tx+(1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y)$$
$$\varphi(t) \le t\,\varphi(1) + (1-t)\,\varphi(0)$$

Dato che x e y sono arbitrari $\Rightarrow$ f è convessa.

Il viceversa si fa in modo simile, ragionando a rovescio

- Se f è convessa, $\Rightarrow$ dati x e y
  $\varphi(t) := f(tx+(1-t)y)$ è convessa in t
  $\Rightarrow \varphi''(t) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad H_f(x) \ge 0 \ \forall x y$

f C^2 $\quad$ f convessa su A convesso $\iff$ $H_f(x) \ge 0 \quad \forall x \in A$

PAUSA $\to$ 16.15

Ex 8 del compitino $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{5x^2+3y^4} \qquad f(0,0)=0$

① Continua? $\boxed{\text{sì}}$

$$|f(x,y)| \le \frac{|x|\,|x|y^2}{3x^2+3y^4} \le \frac{|x|}{3}\,\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^4}{2}}{x^2+y^4} = \frac{|x|}{6} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

② $$f'(0,0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\frac{(tv_x)^2(tv_y)^2}{5(tv_x)^2+3(tv_x)^4} = \frac{t^4\,v_x^2 v_y^2}{t^3(5v_x^2+3t^2v_y^4)}$$

$$\lim_{t\to 0} t\,\frac{v_x^2 v_y^2}{5v_x^2+3t^2v_y^2} = 0 \quad \text{se } v_x \ne 0$$

0 per ogni $t \ne 0$

se $v_x = 0$ $\quad$ ho $\quad \lim_{t\to 0} \dfrac{0}{3t^2v_x^4} = 0$

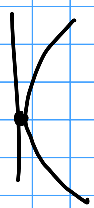
$$\Longrightarrow \quad f'(0,0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \qquad (\text{È LINEARE!})$$

③ Differenziabile? $\quad$ Devo vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \; ??$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{(5x^2+3y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \; ??$$ (sulle rette fa zero MA NON BASTA)

mi metto sulla curva $x = y^2$ (sulla curva $\gamma(t) = (t^2, t)$)



$$\lim_{t\to 0} \frac{t^4 t^2}{(5t^4+3t^4)\sqrt{t^4+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^6}{t^5(\dots)} = 0$$

NE RIPARLIAMO DOMANI (EVENTUALMENTE RICONTROLLO IL COMPITO.)

PROBLEMA DELLA DIFFERENZIABILITÀ DI f^{-1}

TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE

$A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad f : A \to \mathbb{R}^N$ (dim. eguali in partenza e arrivo)

f è $C^1(A)$ e che in un punto $x_0 \in A$ si ha

$$\det \underbrace{J_f(x_0)}_{N\times N} \neq 0 \iff J_f(x_0) \text{ è } \underline{\text{invertibile}}$$

Allora esiste $\rho_0 > 0$ tale che:

(a) f è iniettiva su $B(x_0, \rho_0) = \{x : \|x - x_0\| < \rho_0\}$

(b) l'insieme $\Omega = f(B(x_0,\rho_0))$ è aperto (di $\mathbb{R}^N$)

Dunque è definita $f^{-1} : \Omega \to B(x_0, \rho_0)$

(c) f^{-1} è di classe $C^1(\Omega)$ e vale

$$J_{f^{-1}}(y) = \underbrace{J_f(f^{-1}(y))^{-1}}_{\text{matrice inversa (tutte } N\times N)} \qquad y \in \Omega$$

o anche $\quad J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1}$ $\quad$ dove $y \in \Omega$ $\quad x \in B(x_0, \rho_0)$
$f(x) = y$

DIM. Andiamo per passi.

(1) Scelgo $\boxed{\rho_0 > 0}$ in modo che

$$\| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x) \| < \frac{1}{2} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Lo posso fare perché se considero $g(x) = \| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x) \|$

vedo che $g(x_0) = \| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x_0) \| = \| I - I \| = 0$

È chiaro che g è continua $\Rightarrow$ se $x \simeq x_0$ $\quad g(x) < \frac{1}{2}$

(2) Pongo $\boxed{\Phi(x) = x - J_f(x_0)^{-1} f(x)}$ $\quad (\Phi : A \to \mathbb{R}^N)$

Φ è C^1 e $\quad J_\Phi(x) = I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x)$

Per la disuguaglianza in 1 e quanto dalla PRIMA

Φ è $\frac{1}{2}$ LIPSCHITZIANA su $B(x_0, \rho_0)$ (convesso).

$$\| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \| \leq \frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \| \qquad \forall\, x_1\, x_2 \in B(x_0, \rho_0)$$

(3) Prendiamo $x_1, x_2 \in B(x_0, \rho_0)$

$$J_f^{-1}(x_0)\big(f(x_1) - f(x_2)\big) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) + x_1 - x_2$$

$$\| J_f^{-1}(x_0)(f(x_1) - f(x_2)) \| = \| \Phi(x_2) - \Phi(x_1) + (x_1 - x_2) \| \geq$$

$$\left(\begin{array}{l} \|B\| - \|A\| \leq \|A + B\| \\ \|B\| = \|B + A - A\| \leq \|A + B\| + \|A\| \end{array} \right)$$

$$\geq \| x_2 - x_1 \| - \| \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \| \geq$$

$$\| x_2 - x_1 \| - \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \| = \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \|$$

DUNQUE

$$\frac{1}{2}\|x_2-x_1\| \le \|J_f^{-1}(x_0)\,(f(x_2)-f(x_1))\| \le \|J_f^{-1}(x_0)\|\,\|f(x_2)-f(x_1)\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|f(x_2)-f(x_1)\| \ge \frac{\|x_2-x_1\|}{2\,\|J_f^{-1}(x_0)\|}} \qquad \forall\, x_1, x_2 \in B(x_0,\rho_0)$$

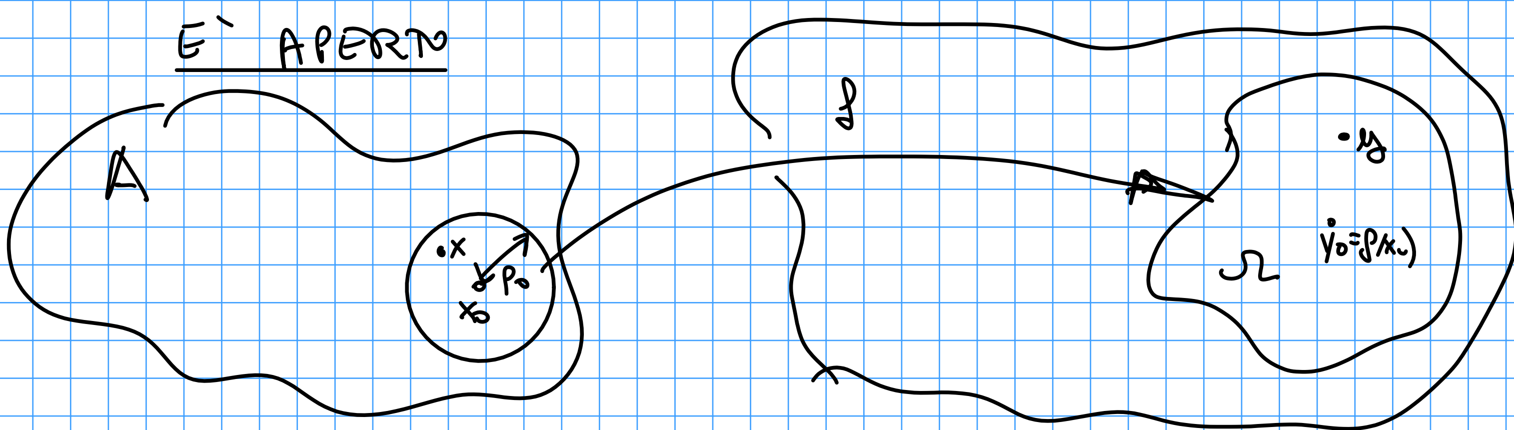
DUNQUE f è INIETTIVA

(l'idea che sottende a questo dim è che, se $x \simeq x_0$ $\quad f(x) \simeq f(x_0) + J_f(x_0)(x-x_0)$)

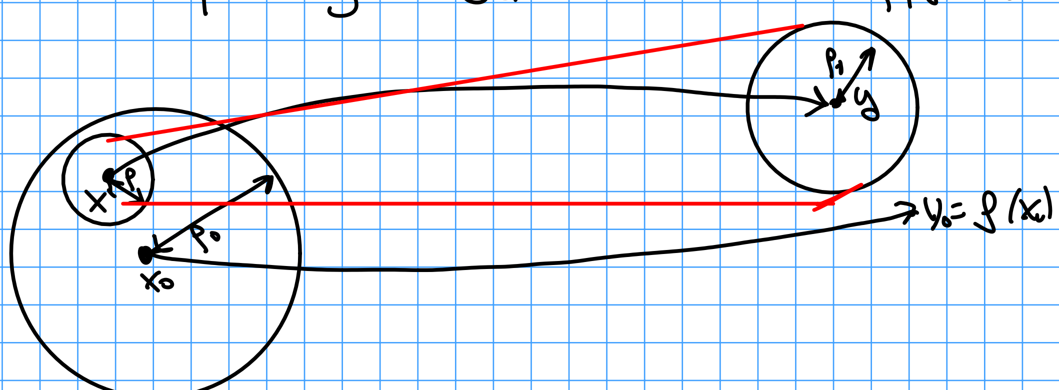
(4) DEVO DIMOSTRARE CHE $\Omega := f(B(x_0,\rho_0))$, cioè

$$\Omega = \{ y \in \mathbb{R}^N : \exists\, x \in B(x_0,\rho_0) \text{ con } f(x)=y \}$$

<u>È APERTO</u>



Prendo dunque $y \in \Omega \iff \exists\, x \in B(x_0,\rho_0)$ con $f(x)=y$



(devo dimostrare che tutto un intorno di y è contenuto in $f(B(x_0,\rho_0))$)

TROVO ρ tale che $\overline{B(x,\rho)} \subset B(x_0,\rho_0)$

e scelgo $\rho_1 := \dfrac{\rho}{2\,\|J_f^{-1}(x_0)\|}$

Dico che tutti i punti $y' \in B(y, \rho_1)$ provengono da uno $x' \in B(x, \rho)$ $\iff$

$$\boxed{\forall\, y' \in B(y, \rho_1) \quad \exists\, x' \in B(x, \rho) \text{ tale che } f(x') = y}$$

PONGO

$$\Phi_{y'}(x') = x' - J_f(x_0)^{-1}\left(f(x') - y'\right)$$

$$\left(= \Phi(x') + J_f(x_0)^{-1} y' \right)$$

$$J_{\phi_y}(x') = J_\phi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\| \Phi_y(x') - \phi_y(x'')\| \le \frac{1}{2}\|x' - x''\|}$$

INOLTRE

$$\phi_y(x) = x - J_f(x)^{-1}(\underbrace{f(x) - y}_{=0}) = x$$

ALLORA se $y' \in B(y, \rho_1)$ $\quad x' \in B(x, \rho)$

$$\| \phi_{y'}(x') - x \| = \| \phi_{y'}(x') - \phi_y(x)\| =$$

$$\| \phi_{y'}(x') - \phi_y(x') + \phi_y(x') - \phi_y(x)\| \le$$

$$\| \phi_{y'}(x') - \phi_y(x')\| + \underbrace{\| \phi_y(x') - \phi_y(x)\|}$$

$$\| J_f^{-1}(x_0)(y' - y)\| + \frac{1}{2}\|x' - x\| \le$$

$$\| J_f^{-1}(x_0)\| \, \|y' - y\| + \frac{1}{2}\rho \le \|J_f^{-1}(x_0)\| \rho_1 + \frac{\rho}{2} \le \rho$$

DUNQUE se $\|x - x'\| \le \rho$ e $\|y - y'\| \le \rho_1 \Rightarrow$

$$\phi_{y'}(x') \in \overline{B(x, \rho)}$$

IN ALTRI TERMINI $\quad \phi_{y'}: \overline{B(x, \rho)} \to \overline{B(x, \rho)}$ e

$\phi_{y'}$ è $\frac{1}{2}$ - lipschitziana

$\Rightarrow$ per il teorema delle contrazioni $\Phi_{y'}$ ha un punto fisso

cioè $\exists\, x' \in \overline{B(x_0,\rho)} : \Phi_{y'}(x') = x' \iff$

$$x' - J_g(x_0)^{-1}(g(x') - y') = x' \iff$$

$$J_g(x_0)^{-1}(g(x') - y') = 0 \iff$$

$$g(x') = y'$$

Dunque $\forall\, y' \in \overline{B(y, \rho_1)}$ esiste $\overline{x' \in B(x,\rho)} \subset \Omega$

tale che $g(x') = y'$

Ho DIMOSTRATO CHE $\boxed{\Omega \text{ è aperto}}$