Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 24 18/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZIO

$$\boxed{f(x,y) = (1+x-y)\ln(1-xy)}$$

SCRIVERE il polinomio di Taylor di grado 4 in $(0,0)$

~~Consideriamo il pol. di grado 3 di ln (1-xy)~~ NO

Sviluppiamo $\ln(1-xy)$ (e poi lo moltiplico per $(1+x-y)$)

a che ordine??

Se lo sviluppo all'ordine 3 SBAGLIO perché trovo:

$$\ln(1-xy) = P_3(x,y) + o(\|(x,y)\|^3) \Rightarrow$$

$$f(x,y) = (1+x-y)\ln(1-xy) = \underbrace{(1+x-y)P_3(x,y)}_{\text{è } P_4 \text{ della } f!} + \underbrace{(1+x-y)\,o(\|x,y\|^3)}_{\text{LO È se è } o(\|x,y\|^4)}$$

IN REALTÀ $(1+x-y)\,o(\|(x,y)\|^3) = \left(1+o(\|\ \|)+o(\|\ \|)\right)o(\|\ \|^3)$

$$= o(\|\ \|^3) + \underbrace{o(\|\ \|^4) + o(\|\ \|^4)}_{\text{NON SONO UTILI}} = o(\|\ \|^3)$$

$\Rightarrow \quad (1+x-y)P_3(x,y) =$ è il polinomio di Taylor per f di ORDINE 3 + pezzi grado 4 che però non sono quelli che formano P_4 per f

MI SERVE il polinomio di ordine 4 di $\ln(1-xy)$

MI BASO su $\ln(1+t)$ $\quad (t \simeq 0 \quad t \in \mathbb{R})$

mettendo poi $t = -xy$. Dato che $-xy = O(\|x,y\|^2)$

MI BASTA lo sviluppo di $\ln(1+t)$ di grado 2

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1-xy) = -xy - \frac{(-xy)^2}{2} + o((-xy)^2) =$$

$$-xy - \frac{x^2y^2}{2} + o\left(O(\|x,y\|^2)^2\right) =$$

$$\underbrace{-xy - \frac{x^2y^2}{2}}_{\text{è il } P_4 \text{ di } \ln(1-xy) \text{ in } (0,0)} + o(\|(x,y)\|^4)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = (1+x-y)\left(-xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|(x,y)\|^4)\right) =$$

$$-xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|(x,y)\|^4) + (x-y)\left(-xy \underbrace{- \frac{x^2y^2}{2} + o(\|(x,y)\|^4)}\right)$$

$$-xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|(x,y)\|^4) - x^2y + xy^2 + o(\|(x,y)\|^4)$$

$$\Rightarrow \quad P_4(x,y) = -xy - x^2y + xy^2 - \frac{x^2y^2}{2} \quad = \frac{1}{2!\,2!}\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2}$$

CHI È $\dfrac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2} = (2!\,2!)\cdot$coeff. di $x^2y^2 = 2 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

• ANALOGAMENTE SI VEDE $\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^4} = 0$ (Non c'è x^4 nello sviluppo)

• $\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\, \partial y^2} = 1!\, 2!$ coeff di $x y^2 = 2 \cdot 1 = 2$

VERIFICA $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(f(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln(1-xy) \Big) =$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-x}{1-xy} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{(1-xy)^2} =$$

$$\frac{2x(1-xy)^2 - x^2\, 2(1-xy)(-y)}{(1-xy)^4} = \frac{2x(1-xy) + 2x^2 y}{(1-xy)^3} =$$

$\frac{2x}{(1-xy)^3}$ se lo calcolo in $x=0$ trovo zero ?

ERA UN PRODOTTO ... CONTI LUNGHI

NON LO FACCIAMO.

ESEMPIO

$$f(x,y,z) = (1 - x - y + xy)\, e^{x+y+z}$$

• VOGLIO $P_{4,P_0}(x,y,z)$ dove $P_0 = (1,1,-2)$

Devo esprimere tutto in termini di $x-1$, $y-1$, $z+2$

CONVIENE ALLORA definire $x = 1+\alpha$ $y = 1+\beta$ $z = -2+\gamma$

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = f(1+\alpha, 1+\beta, -2+\gamma) =$$

$$\big(1 - (1+\alpha) - (1+\beta) + (1+\alpha)(1+\beta)\big)\, e^{1+\alpha+1+\beta-2+\gamma} =$$

$$(\cancel{1} - \cancel{1} - \alpha - \cancel{1} - \beta + \cancel{1} + \alpha + \beta + \alpha\beta)\, e^{\alpha+\beta+\gamma} =$$

$$\alpha\beta\, e^{\alpha+\beta+\gamma}$$

MI BASTA IL P_2 di $e^{\alpha+\beta+\gamma}$

(lo vediamo subito)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow$$

$$e^{\alpha+\beta+\gamma} = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\,) + o(\|\alpha,\beta,\gamma\|^2)$$

$$\Rightarrow g(\alpha,\beta,\gamma) = \underbrace{\alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma + \frac{\alpha^3\beta}{2} + \frac{\alpha\beta^3}{2} + \frac{\alpha\beta\gamma^2}{2} + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma}_{P_4(\alpha,\beta,\gamma)} + o(\|\alpha,\beta,\gamma\|^4)$$

DUNQUE

$$f(x,y,z) = P_4(x-1,\, y-1,\, z+2) + o(\|x,y,z\|^4)$$

$(=1)$ che corrisponde a $\underset{\alpha}{(x-1)}\underset{\beta^2}{(y-1)^2}\underset{\gamma}{(z+2)}$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial^2 y\, \partial z}(1,1,-2) = 1!\,2!\,1! \cdot c_{1,2,1} = \boxed{2}$$

Ex. Supponiamo di sapere che $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(0,0) = (1,2) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 2$$

Chiamo $h(x,y) = \| f(xy-1,\, x-y)\|^2 \quad (h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

VORREI SAPERE QUANTO FANNO

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = ? \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = ?$$

Devo usare le formule del calcolo delle derivate (Jacobiani)

$$h(x,y) = n(f(g(x,y))) \quad \text{dove}$$

$$g(x,y) = (xy-1,\, x-y)$$

$$n(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$\boxed{J_h(x,y) = J_m(f(g(x,y)))\, J_f(g(x,y))\, J_g(x,y)}$$

$f(g(1,1))$

Se metto $(x,y)=(1,1) \Rightarrow g(1,1)=(0,0) \Rightarrow f(0,0)=(1,2)$

La formula diventa

$$J_h(x,y) = J_m(1,2)\, J_f(0,0)\, J_g(1,1)$$

Calcoliamo questi Jacobiani

$$g(x,y) = xy-1,\ x-y \Rightarrow J_g(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_g(1,1) =$$

$$J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$J_m(x,y) = (2x, 2y) \Rightarrow J_m(1,2) = [2, 4]$$

DUNQUE

$$J_h(1,1) = [2,4]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[2,4]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = [12, -16]$$

$$\Leftrightarrow \nabla h(1,1) = \begin{bmatrix} 12 \\ -16 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 12 \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = -16$$

---

si potrebbe prendere $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1+x+3y \\ 2-x+2y \end{pmatrix}$

allora $h(x,y) = \left(1+(xy-1)+3(x-y)\right)^2 + \left(2-(xy-1)+2(x-y)\right)^2$

$$h(x,y) = (xy+3x-3y)^2 + (3-xy+2x-2y)^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2(xy+3x-3y)(y+3) + 2(3-xy+2x-2y)(-x+2)$$

lo calcolo in $(1,1) \to 2(1+3-3)(4) + 2(3-1+\cancel{2}-\cancel{2})(1) =$

$$8 + 2(2) = 12$$

Stesso discorso per $\frac{\partial h}{\partial y}(1,1)\ldots$

(compit 2/2/19)

ES. $f(x,y) = 2x^2 + 6x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

TROVIAMO I PTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 24x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$$

Faccio anche le derivate II^e (per dopo)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + 72x^2 - 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -24xy \qquad \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4+72x^2-12y^2 & -24xy \\ -24xy & -12x^2+12y^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2$$

pti stazionari: $\begin{cases} x+6x^3-3xy^2=0 \\ -3x^2y+y^3=0 \end{cases}$

$x+6x^3-3xy^2=0 \nearrow x=0$, $\searrow 1+6x^2-3y^2=0$

$-3x^2y+y^3=0 \nearrow y=0$, $\searrow -3x^2+y^2=0$

$\Rightarrow$ 4 COMBINAZIONI

(A) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases}$

solo $(0,0)$

$$(C)\ \begin{cases} 1+6x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} 1+6x^2 = 3y^2 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

TROVO $(0,0)$ e la condizione (D)

$$(D) \Rightarrow \quad 1+6x^2 = 3\,3x^2 = 9x^2 \iff 1 = 3x^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \pm 1$$

(quattro punti)

$$(0,0) \quad e \quad \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm 1\right)$$

Facciamo gli Hessiani

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4+72x^2-12y^2 & -24xy \\ -24xy & -12x^2+12y^2 \end{bmatrix}$$

• $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ci ricavo poco

(che $f(x,0)$ ha minimo locale in 0)

$$f''(0,0)(\hat{e}_1^{\,2}) = \frac{d^2}{dx^2} f(x,0) = (1,0)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \ )$$

• $$H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) = H_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right) = \begin{bmatrix} 4+\frac{72}{3}-12 & -24\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -24\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{12}{3}+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -8\sqrt{3} \\ -8\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}$$

det $16\cdot 8 - 64\cdot 3 < 0$

$64\cdot 2 - 64\cdot 3 = -64$

$$H_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) = H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right) = \begin{bmatrix} 16 & 8\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}$$

TUTTI PTI DI SELLA

DOMANDE POSSIBILI

f HA MAX / MIN SU $\mathbb{R}^2$

Se avesse max in un punto P $\Rightarrow$ P=(0,0)

(P deve essere critico, ma l'unico pto critico possibile è (0,0) - gli altri sono di sella)

$$\Rightarrow \max_{\mathbb{R}^2} f = f(0,0) = 0$$

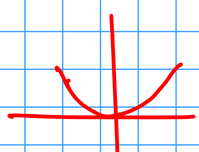
cioè $f(x,y) \le 0 \quad \forall x,y$

{ IMPOSSIBILE perché vicino a zero, sull'asse x f cresce e quindi diventa >0 ⊛

ANALOGAMENTE se f ha minimo $\Rightarrow$

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = 0 \iff f(x,y) \ge 0 \quad \forall x, y$$

⊛ se faccio $f(x,x) = 2x^2 + 6x^4 - 6x^4 + x^4 = 2x^2 + x^4 = 2x^2 + o(x^2)$

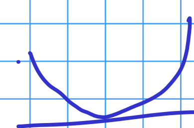


vicino a zero è come x^2

POTREBBE AVERE MINIMO, in quel caso

$f(x,y) \ge 0$

andrebbe d'accordo con $f(0,y) = y^4$

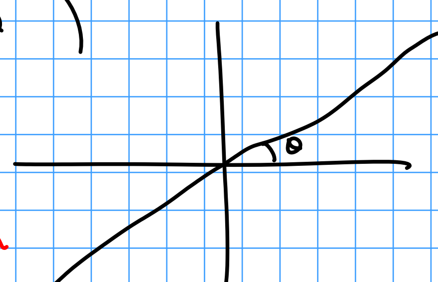


ha derivata 2° nulla in zero

Questo discorso SUGGERISCE che (0,0) è minimo locale

Proviamo a calcolare $f(\cos\theta\, r, \sin(\theta)\, r)$

(cioè su una retta di inclinazione θ)



TROVO

$$\overbrace{2\cos^2\theta\, r^2 + \left(6\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\right) r^4}$$

se mando r a zero vedo che conta $2\cos^2\theta\, r^2$ che ha un minimo in $r=0$ (confermo l'impressione che $(0,0)$ sia di minimo MA NON BASTA)

che succede se $r \to \infty$ CONTA IL SEGNO D)

$$\boxed{6\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta} = 6(1-\sin^2\theta)^2 - 6(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta + \sin^4(\theta) = ☆☆$$

~~$(\cos^2\theta, \sin^2\theta)\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos^2\theta \\ \sin^2\theta\end{pmatrix}$ INDEFINITA ha det $6-9<0$~~

~~(Allora la matrice $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ha due autovettori e_1 e_2 ortonormali di autovalori $\lambda_1>0$ $\lambda_2<0$~~

~~dovrei trovare e_2 . .)~~

PIU' semplicemente provo dei θ, per es. $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$6(1-\sin^2\theta)^2 - 6(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta + \sin^4(\theta) = ☆☆ \qquad (s\in[0,1])$$

$\sin^2\theta = s$

$$6(1-s)^2 - 6(1-s)s + s^2 =$$
$$6(1-2s+s^2) - 6s + 6s^2 + s^2 =$$
$$6 - 12s + 6s^2 - 6s + 6s^2 + s^2 =$$
$$6 - 18s + 13s^2 = g(s) \qquad 0\le s\le 1$$

$g(0) = 6 \qquad g(1) = 1$

$g'(s) = -18 + 26s = 0 \iff s = \frac{9}{13}$

$$g\left(\frac{9}{13}\right) = 6 - 18\cdot\frac{9}{13} + 13\,\frac{9^2}{13^2} = 6 - 2\,\frac{9^2}{13} + \frac{9^2}{13}$$

$$6 - \frac{81}{13} = \frac{78-81}{13} < 0$$

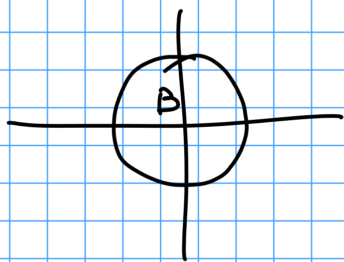
Ho TROVATO CHE se $\sin^2\theta = \frac{9}{13}$ su quella retta

$f \longrightarrow -\infty$ $\boxed{\text{NON HA MINIMO}}$

PROVIAMO A VEDERE SE SI TROVANO

$\max\limits_{B} f = ?$ $\qquad \min\limits_{B} f \qquad$ dove

$B = \{x^2+y^2 \le 1\}$ $\qquad$ ESISTONO PER WEIERSTRASS



ci sono $\overline{P}$ e $\underline{P}$ t.che

$$f(\underline{P}) \le f(P) \le f(\overline{P}) \qquad \forall P \in B$$

sia per $\overline{P}$ che per $\underline{P}$ ci sono due possibilità!

(1) $\overline{P} \in \mathring{B} = \{x^2+y<1\} \Rightarrow \overline{P}$ è critico $\quad$ IMPOSS. NON CI SONO PTI DI MAX REL.

$\underline{P} \in \mathring{B} \Rightarrow \underline{P} = (0,0)$

(2) $\overline{P}\,(\underline{P}) \in S = \{x^2+y^2=1\}$

Posso vedere quanto fa $\max\limits_{S} / \min\limits_{S}$ di f ??

POSSO "PARAMETRIZZARE" S con la curva

$\gamma(t) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e quindi vedo f sul γ

$g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)) =$

$$2\cos^2\theta + 6\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

$$g'(\theta) = -4\cos\theta\sin\theta - 24\cos^3\theta\sin\theta$$
$$+12\cos\theta\sin^3\theta - 12\cos^3\theta\sin\theta + 4\sin^3\theta\cos(\theta) =$$

$$-4\sin\theta\cos\theta\left(1 + 6\cos^2\theta - 3\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) =$$
$$-4\sin\theta\cos\theta\left(1+6-6\sin^2\theta - 3\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta - \sin^2\theta\right) =$$

$$-4\sin\theta\cos\theta\,(10-13\sin^2\theta)$$

$$g'(\theta)=0 \iff \sin\theta=0 \quad \cos\theta=0$$
$$\sin^2\theta=\frac{10}{13}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{cccc} x & \pm 1 & 0 & \pm\sqrt{\frac{3}{13}} \\ y & 0 & \pm 1 & \pm\sqrt{\frac{10}{13}} \end{array} \quad \leftarrow \text{PUNTI DA GUARDARE SU } S$$

$$f(\pm 1, 0)=8 \qquad f(0 \pm 1)=1$$

$$f\left(\pm\sqrt{\tfrac{3}{13}}\ \pm\sqrt{\tfrac{10}{13}}\right)=2\frac{3}{13}+6\frac{9}{13^2}-6\frac{3}{13}\frac{10}{13}+\frac{106}{13^3}$$

VIENE $>0=\frac{52}{13^2}<1$

$\Rightarrow$ IL PTO DI MINIMO $\underline{P}=(0,0)$

e $\min\limits_{B} f = 0$ ((0 0) è di minimo locale)

$\max\limits_{B} f = 8$

$$e^{zx+1}$$

$$x=1+\alpha \quad y=1+\beta \quad z=-1+\gamma$$

$$zx+1=(1+\alpha)(\gamma-1)+1=$$

$$\gamma-\alpha+\alpha\gamma$$

VINCO

$$e^{\boxed{\gamma-\alpha}+\alpha\gamma} \qquad \gamma-\alpha = O(\|\ \|) \qquad \alpha\gamma = o(\|\ \|)$$

$$e^t=1+t+o(t)$$

$$e^{\gamma-\alpha+\alpha\gamma}=1+\gamma-\alpha+\alpha\gamma+\underbrace{o(\gamma-\alpha+\alpha\gamma)}_{o(\|\ \|)}$$

$O(\|\ \|)$ $\quad O(\|\ \|^2)$