Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 23 17/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZIO Data la funzione

$$f(x,y,z) = (x+y+2z)\,\underbrace{e^{xy+1}}_{P_2 \text{ di } e^{xy+1}}$$

Scrivere il polinomio di Taylor nel punto $P_0 = \boxed{(0,0,0)}$ di ordine $\boxed{3}$ SI ESPRIMA $P_{3,P_0}(x)$ in termini di

$$P_{3,0}(x,y,z) = \sum_{|\alpha|\le 3} \frac{D^\alpha f(P_0)}{\alpha!}(x,y,z)^\alpha$$

Per trovare P_3 potrei calcolare $D^\alpha f(P_0)$ $\forall |\alpha| \le 3$ MA SI PUÒ FARE IN MODO + semplice.

Conviene partire dallo sviluppo di e^t $t \in \mathbb{R}$

MI DOVREBBE BASTARE:

$$e^t \underset{(t\to 0)}{=} 1 + t + o(t)$$ (al posto di $t \to xy+1$ che è di grado 2)

ATTENZIONE se $x \to 0$ $y \to 0$ $xy+1 \to 1$ $(\neq 0)$

NON POSSO USARE LO SVILUPPO IN $t \to 0$! PERÒ

$$e^{xy+1} = e^{1}\, e^{xy} = e\left(1 + xy + o(xy)\right)$$

<u>FATTO GENERALE</u> 1 Se $x = (x_1 \dots x_N)$

$$|x_i| \le \|x\|$$

in altri termini $\dfrac{|x_i|}{\|x\|} \le 1$ che si usa scrivere $x_i = O(\|x\|)$

So anche che $o\left(O(f)\right) = o(f)$ DUNQUE!

$$o(f)\cdot o(g) = o(fg)$$
$$O(f)\, o(g) =$$

FATTO GENERALE 2

(nell'esempio so che $x = o(\|P\|)$ $y = o(\|P\|)$ $P=(x,y)$

$$\Rightarrow xy = o\left(\|P\|^2\right)$$

$$e^{xy+1} = e\left(1 + xy + o(\|(x,y,z)\|^2)\right)$$

MOLTIPLICO PER $(x+y+2z)$ $\Rightarrow$

$$f(x,y,z) = e(x+y+2z)\left(1+xy+o(\|(x,y,z)\|^2)\right) =$$

$$e\Big(x + x^2y + \overbrace{x\, o(\|x,y,z\|^2)}^{O(\|\ \|)\cdot o(\|\ \|^2)} + y + xy^2 + \overbrace{y\, o(\|x,y,z\|^2)}^{O(\|\ \|)\cdot o(\|\ \|^2)} +$$
$$2z + 2xyz + \underbrace{2z\, o(\|x,y,z\|)}_{O(\|\ \|)\, o(\|\ \|^2)}\Big) =$$

I TRE PEZZI ROSSI

$$e\left(x + y + 2z + x^2y + xy^2 + 2xyz + o(\|(x,y,z)\|^3)\right)$$

Ho trovato che

$$\boxed{P(x,y,z) = e\left(x+y+2z+x^2y+xy^2+2xyz\right)}$$

verifico che $\text{grado}(P) = 3$ e

$$f(x,y,y) = P(x,y,z) + o(\|x,y,z\|^3)$$

Per l'unicità $\Rightarrow$ $P_{3,0}(x,y,z) = P(x,y,z)$

Dallo sviluppo che abbiamo trovato posso ricavare i valori di $D_\alpha f(0,0,0)$ per $|\alpha| \le 3$. Per esempio

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0) = ??$$

So che il $\underbrace{\text{coeff. relativo ad } \alpha = (1,1,1)}_{\text{quello che moltiplica } x^1 y^1 z^1 = xyz}$ vale $\boxed{2e}$

(lo chiamo $c_\alpha = c_{(1,1,1)}$)

So che $c_\alpha = \dfrac{D_\alpha f(0,0,0)}{\alpha!} = \dfrac{1}{1!1!1!} \dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f(0,0,0)$

$\Rightarrow$ questa derivata vale $\boxed{2e}$

$\dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(0,0,0) = ??$ Uso $\alpha = (2,1,0)$

il corrispondente c_α (che moltiplica $x^2 y$) fa e

$\Rightarrow$ $1 = \dfrac{1}{2!\,1!\,0!} \dfrac{\partial^3 f(0,0,0)}{\partial x^2 \partial y}$ $\Leftrightarrow$ <u>la derivata fa $2e$</u>

ESEMPIO

$$f(x,y,z) = (x+y+2z)\, e^{xy-1}$$

$$P_0 = (1,1,-1)$$

Cerco ancora $P_{3,P_0}(x,y,z)$ (IN TERMINI DI $(x-1)$, $(y-1)$, $z+1$)

Uso sempre lo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ $(t \to 0)$

Noto che $xy-1$ fa zero x $x=1$ $y=1$ $\Rightarrow$ posso prendere $xy-1$ come t

$$e^{xy-1} = 1 + (xy-1) + o(\underbrace{xy-1})$$

?? $o(\|(x-1)(y-1)\|)$?? **No**

Devo scrivere $xy-1$ in termini di $(x-1)$ e $(y-1)$:

$$\underbrace{xy-1} = (x-1+1)(y-1+1) - 1 = (x-1)(y-1) + (y-1) + (x-1) + 1 - 1$$

$$\boxed{xy-1 = (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)} \quad (*)$$

$$xy-1 = o(\|(x-1, y-1)\|) \qquad (\text{NON } o(\| \quad \|^2) \,!!)$$

Devo aggiungere un termine allo sviluppo di e^t: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$\Rightarrow e^{xy-1} = 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}\left((x-1) + (y-1) + o(\|(x-1, y-1)\|)\right)^2 + o\left((xy-1)^2\right) =$$

$$e^{xy-1} = 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{2} + (x-1)(y-1) + o(\|(x-1, y-1)\|^2))$$

MOLTIPLICO PER $(x+y+2z) = (x-1) + (y-1) + 2(z+1) \Rightarrow$

$$f(x,y,z) =$$

$$\left((x-1) + (y-1) + 2(z+1)\right) \cdot$$

$2(x-1)(y-1)$

$$\left(1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{2} + (x-1)(y-1) + o(\|(x-1, y-1)\|^2)\right) =$$

$$(x-1)+(y-1)+2(z+1)+(x-1)^2+(x-1)(y-1)+2(x-1)(z+1)+$$
$$(x-1)(y-1)+(y-1)^2+2(y-1)(z+1)\quad +$$
$$\cancel{\frac{(x-1)^3}{2}}+\cancel{\frac{(x-1)^2}{2}}(y-1)+\quad (x-1)^2(z+1)\quad +$$
$$\cancel{\frac{(x-1)}{2}}(y-1)^2\ \cancel{\frac{(y-1)^3}{2}}+\quad (y-1)^2(z+1)\quad +$$
$$2(x-1)^2(y-1)+2(x-1)(y-1)^2+4\,(x-1)(y-1)(z+1)\ +o(\|(x,y,z)\|^3)$$

$$\Rightarrow (x-1)+(y-1)+2(z+1)+\ (x-1)^2+2(x-1)(y-1)+(y-1)^2+2(x-1)(z+1)$$
$$+2(y-1)(z+1)+\frac{(x-1)^3}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)(y-1)^2+\frac{(y-1)^3}{2}$$
$$+(x-1)^2(z+1)+(y-1)^2(z+1)\quad = \quad P_3(x,y,z)\qquad (\text{in } (1,1,-1))$$

Ne segue, per esempio che

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}(1,1,-1)=(0,2,1)!\ C_{(0,2,1)}=0!\,2!\,1!\cdot 1=2$$