Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 22 16/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

RIGUARDO AL COMPITINO:

- Verrà utilizzato $\boxed{\text{MOODLE}}$ $\to$ bisogna essere registrati sul portale di E-LEARNING (del corso)
  (modalità a quiz)

- Sto preparando un compitino di prova $\to$ DOMANI

FORMULA DI TAYLOR (versione Peano)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad x_0 \in \mathbb{R}$. $\quad f$ di classe $C^k(A)$.

Chiamo
$$\boxed{P_{k,x_0}(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} x^\alpha}$$

$(\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad \alpha! = k)$

Si ha:
$$(T) \quad f(x) = P_{k,x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^k)$$

ha la proprietà $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x - x_0\|^k} = 0$

INOLTRE P_{k,x_0} è L'UNICO Polinomio P di grado $\le k$

per cui vale (T) (dove metto P al posto di P_{k,x_0})

OSSERVIAMO CHE, se $K=2$, ottengo: $f \in C^2(A) \Rightarrow$

(T2) $$\boxed{f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^2)}$$

INFATTI: (i) se $\boxed{|\alpha|=0} \Leftrightarrow \alpha = (0,\dots,0) \Rightarrow$ UNICO TERMINE $= f(x_0)$

$$\sum_{|\alpha|=0} \frac{D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

(ii) se $\boxed{|\alpha|=1}$ ho N possibilità: $\alpha = (1,0\dots0), (0,1,0\dots0), \dots, (0,0\dots0,1)$

$$\sum_{|\alpha|=1} \frac{D_\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x-x_0)_i = \nabla f(x_0)(x-x_0)$$

(iii) se $\boxed{|\alpha|=2}$ ci sono due casi:

$\alpha = (2,\dots 0) \dots (0\dots 2)$ (N possibilità)

e allora $\alpha! = 2$ $\quad D_\alpha f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$

OPPURE $(1,1,0\dots0) \dots (1,\dots 1, 0\dots 0)$

tutti i possibili indici con due uni

$\alpha! = 1$ $\quad D_\alpha f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ $\quad$ ($\alpha_i = \alpha_j = 1$, gli altri nulli)

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)(x-x_0)_i^2 +$$

Se $\alpha = (\dots 1 \dots 1 \dots)$ chiamo i il primo 1 e j il secondo 1

$$\sum_{i<j} \frac{1}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x-x_0)_i (x-x_0)_j =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)(x-x_0)_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x-x_0)_i (x-x_0)_j =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x-x_0)_i (x-x_0)_j$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots \\ \cdot & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0)$$

TEOREMA (Caratterizzazione dei punti critici nel caso C^2)

$A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\qquad x_0 \in \mathbb{R}^N \qquad f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^2

x_0 punto STAZIONARIO (o CRITICO) per f:

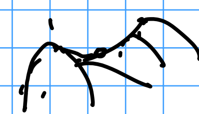
$$\nabla f(x_0) = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \qquad \left(\forall i \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=0\right)$$

(a) Se ho anche che $H_f(x_0)$ è definita positiva (negativa) (scriverò $H_f(x_0)>0$ (<0))

$\Rightarrow$ $\boxed{x_0 \text{ è punto di minimo (massimo) relativo per } f}$

(b) Se $H_f(x_0)$ è INDEFINITA ($\exists\, \lambda_1>0,\ \exists\, \lambda_2<0$ TRA GLI AUTOVALORI)

$\Rightarrow$ x_0 è punto di sella



QUESTE CONDIZIONI SONO SOLO SUFFICIENTI (NON VALE $\Leftarrow$). In effetti si può anche dire:

(a*) Se $H_f(x) \geq 0$ $(H_f(x) \leq 0)$ per tutte le x in $B(x_0,r)$ $\Rightarrow$ $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0,r)$
$(f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0,r))$

nel I° caso x_0 è di min su $B(x_0,r)$ (di min rel. per f su A)

nel II° caso x_0 è di max su $B(x_0,r)$ (di max rel. per f su A)

(VEDREMO POI CHE (a*) $\Rightarrow$ f CONVESSA SU $B(x_0,r)$)

DIM. (a) - caso del minimo. Ho $H_f(x_0) > 0$

Avevamo visto che $H_f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \nu > 0$ tale che

$$\phi(x-x_0) = \boxed{(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0) \geq \nu \|x-x_0\|^2}$$

$$\left(\nu = \min_{\|v\|=1} v^t H_f(x_0) v \right)$$

Uso lo sviluppo di Taylor di grado 2:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)(x-x_0)}_{\substack{=0 \\ (x_0 \text{ è critico})}} + \frac{1}{2}\phi(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^2)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}\phi(x-x_0) + \frac{o(\|x-x_0\|^2)}{\|x-x_0\|^2}\|x-x_0\|^2 \geq$$

$$f(x_0) + \frac{\nu}{2}\|x-x_0\|^2 + \frac{o(\|x-x_0\|^2)}{\|(x-x_0)\|^2}\|x-x_0\|^2 =$$

$$f(x_0) + \left(\frac{\nu}{2} + \underbrace{\frac{o(\|x-x_0\|^2)}{\|x-x_0\|^2}}_{\text{tende a zero se } x \to x_0} \right)\|x-x_0\|^2 = (*)$$

Trovo $r>0$ (piccolo) tale che $\left| \frac{o(\|x-x_0\|^2)}{\|x-x_0\|^2} \right| \leq \frac{\nu}{4}$

per le $x \in B(x_0, r)$. Allora se $x \in B(x_0,r)$ si ha

$$(*) \geq f(x_0) + \left(\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{4}\right)\|x-x_0\|^2 = f(x_0) + \frac{\nu}{4}\|x-x_0\|^2 > f(x_0)$$ se $x \neq x_0$

$\Rightarrow$ f è di min. (stretto) su $B(x_0, r)$ DEF)

(b) NON LA DIMOSTRO

(a*) Si usa la formula di T. all'ordine 1 con resto di Lagrange:

Se $x \in B(x_0, r) \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)(x-x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(\xi)(x-x_0)$$

dove ξ è nel segmento tra x_0 e x ($\xi \in B(x_0,r)$)

allora $H_f(\xi) \geq 0 \Rightarrow$

$f(y) \geq f(x)$ TESI

ESERCIZIO (compito del 30/6/2018)

$$f(x,y) = 4x^3 + 3y^4 - 12xy \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (A = \mathbb{R})$$

(I°) Trovare tutti i pti critici e "classificarli"

Calcoliamo le derivate prime di f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 12y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 - 12x$$

$$(x,y) \text{ critico} \iff \begin{cases} \cancel{12}x^2 = \cancel{12}y \\ \cancel{12}y^3 = \cancel{12}x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^3 = x \end{cases} \quad (SIS)$$

$$\Rightarrow x = y^3 = (x^2)^3 = x^6.$$

$$x = x^6 \iff \begin{cases} x = 0 \\ 1 = x^5 \iff x = 1 \end{cases}$$

Se $x = 0$ da (SIS) $\Rightarrow y = 0$

Se $x = 1$ da (SIS) $\Rightarrow y^3 = 1 \iff y = 1$

HO SOLO DUE PTI CRITICI che sono $(0,0)$ e $(1,1)$

Calcoliamo le derivate II^e. (è chiaro che f è C^2)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 12y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 - 12x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 36y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12$$

DUNQUE $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x & -12 \\ -12 & 36y^2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ (1) $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$ ha determinante $-144 < 0 \Rightarrow$

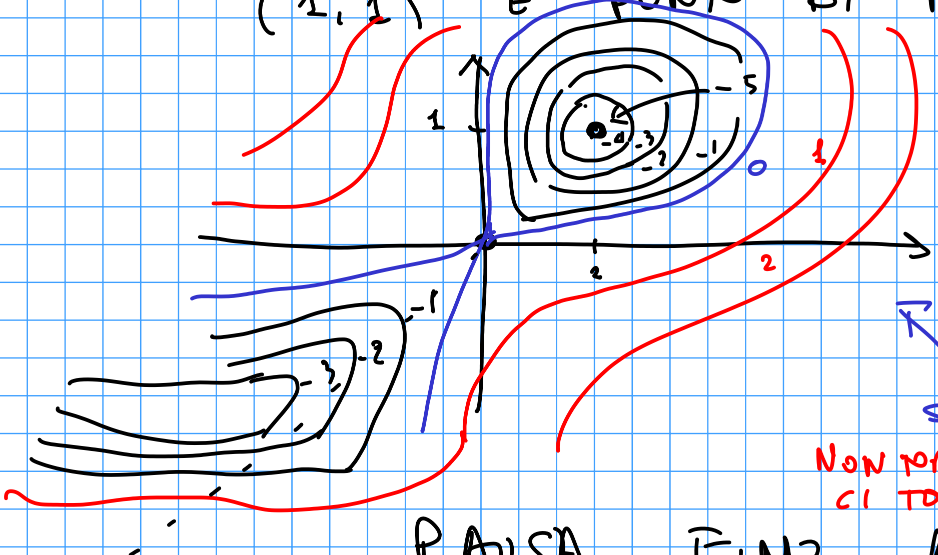
Ha un autov. $\lambda_1 > 0$ e un autov. $\lambda_2 < 0$

(perché H_f è una 2×2 !!)

(0,0) È PUNTO DI SELLA !!

(2) $Hf(1,1) = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 36 \end{bmatrix}$ determinante >0 e $a_{11} = 24 > 0$ $\Big\} \Rightarrow Hf(1,1) > 0$

(1,1) È PUNTO DI MINIMO



$f(1,1) = 4+3-12 = -5$

$f(0,0) = 0$

↖ IDEA DI COME "PROBABILMENTE" SI COMPORTA $f(x,y)$

NON TORNA SUL TERZO QUADRANTE ☹ CI TORNEREMO (SE C'È TEMPO)

PAUSA FINO ALLE 16.25

VEDIAMO VICINO A (0,0). Sappiamo che

$H := Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$. Vediamo chi sono autovalori e autovettori di H.

polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -12 \\ -12 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 144$
$= (\lambda - 12)(\lambda + 12)$

$\lambda_1 = 12$ $\lambda_2 = -12$ gli autovalori.

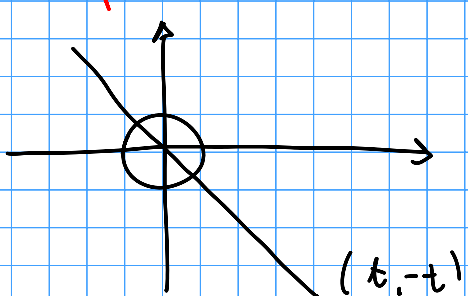
CERCO GLI AUTOVETTORI $e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

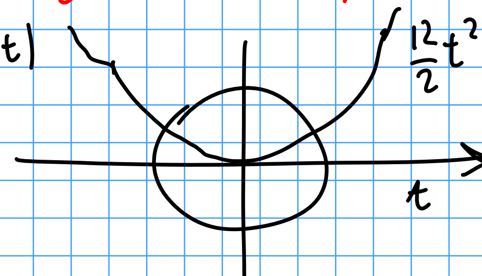
$\begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_1 + y_1 = 0$ (la retta $y = -x$)

$\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_2 - y_2 = 0$ (sta sulla retta $y = x$)

Si può vedere che sulla retta $y = -x$ $f(x,-x) = 0 + 0 + \frac{1}{2}\lambda_1 x^2$

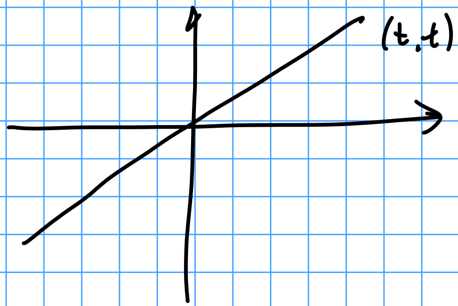
(su $x = t$, $y = -t$)



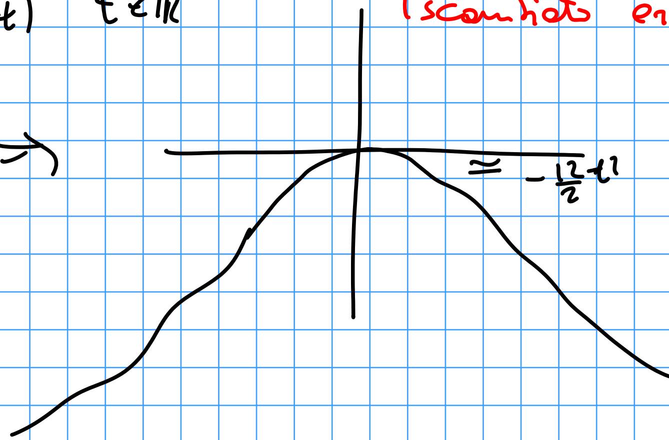


sulla retta $y = x$ cioè (t,t) $t \in \mathbb{R}$

(probabilmente ho scambiato e_1 ed e_2



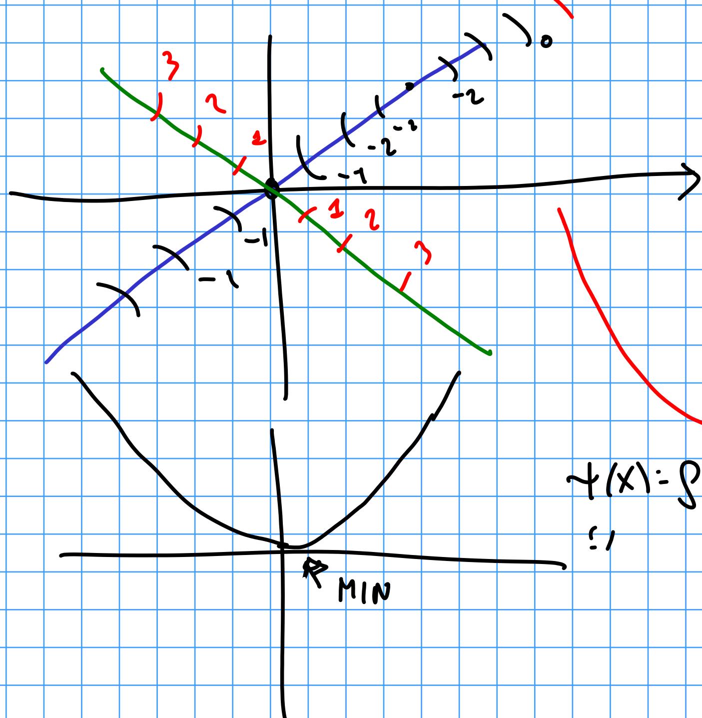
$\rightarrow$

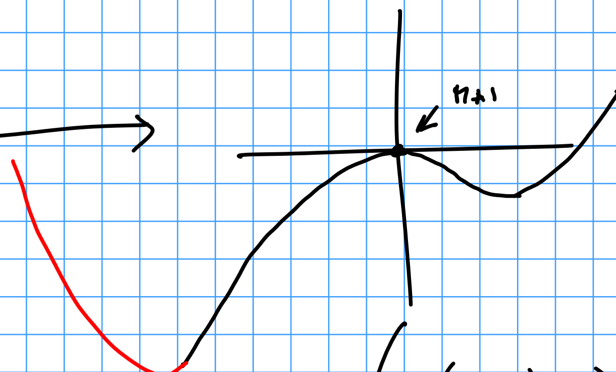


ANDREBBE

QUESTO D'ACCORDO CON LE LINEE DI LIVELLO DISEGNATE SOPRA

DA RIVEDERE





$\varphi(x) = f(x,x)$

$\psi(x) = f(x,-x)$

!!

$(0,0)$ è di sella

con assi le due rette

$y = x$ $\quad y = -x$

ALTRE DOMANDE:

(b) (b.1) f è limitata inferiormente $\boxed{SI}$ $\cancel{\boxed{NO}}$

(b.2) f è limitata superiormente $\boxed{SI}$ $\cancel{\boxed{NO}}$

se mi metto su

la $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$

dato che $f(x,0) = 4x^3$

C'E' UN PROBLEMA SU QUESTI GRAFICI

(però i pti critici e la loro classificazione è OK!)

(c) Se mi restringo al primo quadrante $Q = \{x \geq 0 \quad y \geq 0\}$

posso dire che f ha minimo su Q ??

Vediamo se è vero che

$$\text{(☆)} \quad \lim_{\substack{\|(x,y)\| \to \infty \\ (x,y) \in Q}} f(x,y) = +\infty \qquad \left(xy \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)$$

in effetti $f(x,y) \geq 4x^3 + 3y^4 - 6x^2 - 6y^2 =$

$$\underbrace{(4x^3 - 6x^2)}_{h(x)} + \underbrace{(3y^4 - 6y^2)}_{K(y)}$$

con $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \qquad \lim_{y \to +\infty} K(y) = +\infty$

VALE ☆

Posso applicare $\boxed{\text{W generalizzato}}$ dato che Q è chiuso e quindi non ci sono punti da controllare su ∂Q ($\partial Q \subset Q$)

$\Rightarrow \quad \exists \quad \min_Q f$. Il punto di minimo (x_0, y_0) ha due possibilità:

① $(x_0, y_0) \in \mathring{Q} = \{x > 0, y > 0\}$ e (x_0, y_0) è critico oppure

② $(x_0, y_0) \in \partial Q = \{x = 0, y \geq 0\} \cup \{x \geq 0, y = 0\}$

nel caso ① $(x_0, y_0) = (1,1)$ o $(0,0)$

($(x_0, y_0) = (1,1)$ perché $f(0,0) = 0$ $f(1,1) = -5$)

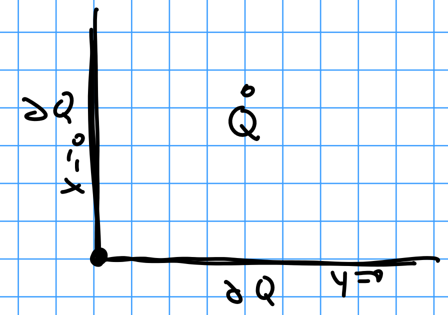
Se siamo nel caso 2 ?? devo considerare f su queste due rette $x = 0$ $y = 0$;

Se (x_0, y_0) sta in ∂Q allora

$\boxed{x_0 = 0}$ e sulla retta $x = 0$ c'è un minimo.

MA $f(0,y) = 3y^4$ che ha minimo solo in $y = 0 \Rightarrow$

$(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0 > -5$ $\boxed{\text{NO}}$



Se invece $y_0 > 0$ $\Rightarrow$ x_0 deve essere di minimo

per $f(x,0) = 4x^3$ ho minimo solo in $x=0$
$(x \geq 0)$

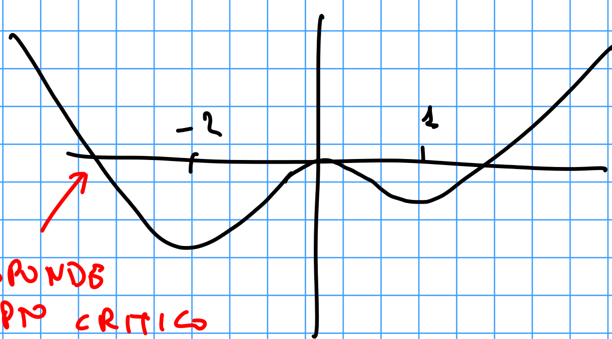
ANCHE IN QUESTO CASO TROVO $f(x_0,y_0)=0 > -5$ | $\boxed{\text{NO}}$

$$\Longrightarrow (x_0,y_0)=(1,1) \qquad \boxed{\min_Q f = -5}$$

<u>CONTO</u> $\varphi(x)=f(x,x) = 3x^4+4x^3-12x^2$

$\varphi(0)=0 \qquad \varphi'(x)=12x^3+12x^2-24x = 12x(x^2+x-2)$

$$x^2+x-2=0 \iff x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}$$



$f(x,x)$

NON CORRISPONDE A UN PTO CRITICO DI $f(x,y)$

$\psi(x) = f(x,-x) = 3x^4+4x^3+12x^2$

$\psi'(x) = 12x^3+12x^2+12x$

FINE