Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 21 11/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Ricordiamo che:

- $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = g'(x_0)v$ dove $g(x) = f'(x)(w)$
- Se f è diff. due volte ($\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ sono tutte diff.)

  $\Rightarrow$ $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$ è bilineare rispetto $\vec{v}$ e $\vec{w}$
- Se $f: A \to \mathbb{R}^N$ chiamo matrice Hessiana

$$H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \qquad i, j = 1 \dots N$$

dove $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f''(x)(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$

(derivo rispetto a x_i la $\frac{\partial f}{\partial x_j}$)

- Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sono continue $\Rightarrow$ f è diff. 2 volte.

INOLTRE (stesse ipotesi) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
(Schwartz)

$\simeq$ H_f è simmetrica

CONTROESEMPIO : Ci sono funzioni con $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0) \qquad f(0,0)=0$$

Se $(x,y) \neq 0$ trovo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Si vede che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$

$\Rightarrow$ (diff. tot.) f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$

Fissiamo due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e calcoliamo

$$g(x,y) = f'(x,y)\vec{w} =$$

$$\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} w_x + \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)} w_y \qquad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$g(0,0) = 0$$

Voglio calcolare $f''(0,0)(\vec{v},\vec{w}) = g'(0,0)\vec{v} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t\vec{v})}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t v_y(t^4v_x^4+4t^4v_x^2v_y^2-t^4v_y^4)}{t\, t^4 (v_x^2+v_y^2)^2} w_x + \frac{t v_x(t^4v_x^4-4t^4v_x^2v_y^2-t^4v_y^4)}{t\, t^4 (v_x^2+v_y^2)^2} w_y$$

$$= \underbrace{\frac{v_y(v_x^4+4v_x^2v_y^2-v_y^4)}{(v_x^2+v_y^2)^2} w_x + \frac{v_x(v_x^4-4v_x^2v_y^2-v_y^4)}{(v_x^2+v_y^2)^2} w_y}_{f''(0,0)(\vec{v},\vec{w})}$$

NON È LINEARE IN $\vec{v}$!!

$(f''(0,0)(e_1,w) + f''(0,0)(e_2,w)$
$\neq f''(0,0)(e_1+e_2,w)$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

- f NON PUÒ ESSERE DIFF 2 VOLTE perché $f''(0,0)(\vec{v},\vec{w})$ NON È LINEARE IN $\vec{v}$.

Dalla formula sopra:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = f''(0,0)(\hat{e}_1, \hat{e}_2) = 1 \; ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = f''(0,0)(e_2, e_1) = -1$$

$\neq$

DERIVATE DI ORDINE K generico. $\quad K \in \mathbb{N} \quad K \geq 2$

$f : A \to \mathbb{R}^M \qquad A \subset \mathbb{R}^N \qquad x_0 \in A$

IN GENERALE SI DEFINISCONO:

- DERIVATE DIREZIONALI K-ESIME:

dati $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_K \in \mathbb{R}^N$

$$f^{(K)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_K) = g'(x_0)\vec{v}_1$$

dove $g(x) = f^{(K-1)}(x)(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_K)$

<u>NOTAZIONE</u>

$$\frac{\partial^K}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_K}} f(x) = f^{(K)}(x)(\hat{e}_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_K})$$

dove $i_1 \dots i_K \in \{1 \dots N\}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} f\right)\right)\right)\right)$$

Per esempio $\quad \dfrac{\partial^4 f}{\partial x_3 \, \partial x_2 \, \partial x_3 \, \partial x_3} = f^{(4)}(\hat{e}_3, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_3)$

- cioè si deriva prima rispetto a x_3, poi rispetto a x_3 poi a x_2 e poi di nuovo a x_3

- Se siamo in $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^2$ scrivo $\dfrac{\partial^4}{\partial z \partial x \partial y \partial x}$ invece di $\dfrac{\partial^4}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}$

- Dico che f è K-volte differenziabile se le derivate parziali fino alla $K-1$ sono differenziabili.

SE CIÒ AVVIENE:

(★) $f^{(K)}(x_0)(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_K)$ è lineare in ogni $v_i \quad i = 1 \dots K$
($f^{(K)}(x)$ è K-LINEARE).

- Se tutte le derivate K esime esistono continue $\Rightarrow$ f è K-volte diff. (in particolare vale ★).

INOLTRE $f^{(K)}(x_0)$ È SIMMETRICA:

$$f^{(K)}(x_0)(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_i \cdots \vec{v}_j \cdots \vec{v}_K) = f^{(K)}(x_0)(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_j \cdots \vec{v}_i \cdots \vec{v}_K)$$
$$\forall\, i \neq j = 1 \cdots K$$

IN QUESTO CASO SCRIVO

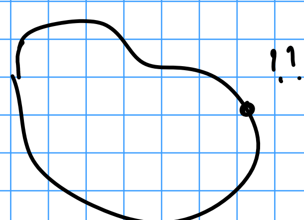
$$\frac{\partial^K}{\partial x_1^{K_1} \cdots \partial x_N^{K_N}}$$ dove $K_1 + \cdots + K_N = K$ $\quad K_i \geq 0$

(se qualche $K_i = 0$ NON SCRIVO NIENTE)

DUNQUE INVECE DI SCRIVERE:

$$\frac{\partial^5}{\partial x \partial y \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}$$

- Chiamo $C^K(A; \mathbb{R}^M)$ $\left(C^K(A) \text{ se } M = 1\right)$
l'insieme delle funzioni che hanno derivate fino all'ordine K continue
- A volte serve $C^K(\bar{A}, \mathbb{R}^M) = f \in C^K(A, \mathbb{R}^M)$ tali che ogni derivata si estende a $\bar{A}$ in modo continuo



<u>OSS.</u> Supponiamo che f sia $C^K(A)$. Dato $x_0 \in A$ e dato $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ considero $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$.
Allora φ è derivabile K volte (in un intorno di $t = 0$)
e $\circledast$ $\Big|$ $\varphi^{(h)}(t) = f^{(h)}(x_0 + t\vec{v})(\underbrace{v, v, \ldots, v}_{h})$ $\quad h \leq K$

in part. $$\boxed{\varphi^{(h)}(0) = f^{(h)}(x_0)(\underbrace{v \cdots v}_{h}) \underset{\text{def.}}{=:} f^{(h)}(x_0)(v^h)}$$

È conseguenza della def. perché

Se $h=1$ è la def. di $f'(x_0)(\vec{v})$

Se $h \leq k$

$$f^{(h)}(x_0)(v,v\cdots v) = g'(x_0)(v) \quad \text{dove} \quad g(x) = \underbrace{f^{(h-1)}(x_0)(\underbrace{v\cdots v}_{h-1})}_{\varphi^{(h-1)}(x+tv)}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x_0,v) = \frac{d}{dt}\varphi^{(h-1)}(x+tv) = \varphi^{(h)}(t)\Big|_{t=0}$$

#

$$\boxed{\frac{d^k}{dt^k} f(x_0+t\vec{v})\Big|_{t=0} = f^{(k)}(x_0)(v^k)}$$

NOTAZIONI

- Chiamo N-multiindice o multiindice di ordine N uno N-pla di numeri interi ≥ 0 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$
  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \ni 0$)
- Chiamo lunghezza o modulo di α la somma
  $$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$
- Chiamo $\alpha! := \alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_N!$ (fattoriale di α)
- Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_N)$ scrivo
  $\vec{v}^{\,\alpha} := v_1^{\alpha_1} \cdot v_2^{\alpha_2} \cdots v_N^{\alpha_N}$
- INDICO CON D_α (derivata α-ESIMA) L'OPERAZIONE
  $$D_\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1\, \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$
  (derivo α_1 volte in x_1, α_2 volte in x_2 ... α_N volte in x_N)

L'INTRODUZIONE DI QUESTI MULTI-INDICI permette di scrivere in forma sintetica cose complicate: per es

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^K = \sum_{|\alpha|=K} \frac{K!}{\alpha!} x^\alpha} \qquad (x=(x_1,\dots,x_N))$$

se $K=2$ $\quad (x_1+x_2)^K = \sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} x_1^i x_2^{K-i} = \sum \frac{K!}{i!(K-i)!} x_1^i x_2^{K-i}$

La formula è semplice da scrivere. Per usarla devo essere in grado di generare tutti i multi indici α di lunghezza k)

PAUSA FINO ALLE 18.25

Taylor

$\Phi(v) = v_x v_y$ NON È LIN.

lineare:- $\quad v = v_x, v_y$

$a v_x + b v_y$

$v = e_1 \quad w$

$\Phi(\hat{e}_1) = 0$

$\Phi(\hat{e}_2) = 0$

$\Phi(\hat{e}_1+\hat{e}_2) = 1 \neq 0+0$

FORMULA DI TAYLOR

k intero > 0

$A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad x_0 \in A \quad f$ di classe $C^K(A,\mathbb{R})$

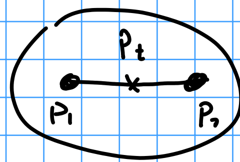
Definisco il POLINOMIO DI TAYLOR in $x=x_0$ di grado k, come segue:

$$P_{K,x_0}(x) = \sum_{|\alpha|\le K} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha$$

($\alpha \in \mathbb{N}$. multiindice) / $D_{(0,\dots,0)} f = f$

TEOREMA 1 (Taylor con resto di Lagrange)

Suppongo **A convesso** (dati P_1 e $P_2 \in A$ e $t \in [0,1] \Rightarrow \underbrace{tP_1+(1-t)P_2}_{P_t} \in A$)



e che $f \in C^{k+1}(A)$

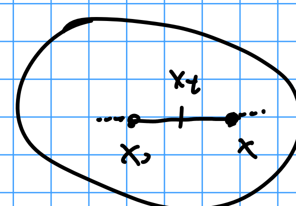
Allora $\forall x \in A\ \exists\, \xi_x$ sul segmento tra x_0 e x tale che

$$f(x) = P_{k,x_0}(x) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\xi_x)(x-x_0)^\alpha}_{\text{resto } k\text{-esimo secondo Lagrange.}}$$

Dim. Prendo $x \in A$. Per $t \in [0,1]$ pongo

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$$

Dato che A è convesso $x_0 + t(x-x_0) = \overbrace{tx+(1-t)x_0}^{x_t} \in A$
$\varphi(t)$ ha senso.



So che φ è derivabile $k+1$ volte su $]a,b[$ con $[0,1] \subset]a,b[$

e (per quanto detto prima)

$$\varphi^{(h)}(t) = f^{(h)}(x_0+t(x-x_0))(\underbrace{\overbrace{x-x_0}^{\vec{v}}, \dots, \overbrace{x-x_0}^{\vec{v}}}_{h \text{ volte}})$$

Applico Taylor (con resto di Lagrange) a $\varphi(t)$ rispetto a $t_0 = 0$ nel punto t $\Rightarrow \exists\, \tau_t \in]0,1[$ tale che

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)(t-0) + \frac{\varphi''(0)}{2}(t-0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau_t)}{(k+1)!}t^{k+1}$$

Se metto $t = 1 \Rightarrow$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau_1)}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{h=0}^{k} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau_1)}{(k+1)!} =$$

$$= \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x_0)(x-x_0)^h + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0+\tau_1(x-x_0))(x-x_0)^{k+1}$$

PROBLEMA Consideriamo $f^{(h)}(x_0)\, v^h$. Per la k-linearità si ha

$$f^{(h)}(x_0)(v_1 \dots v_h) = \sum_{i_1, i_2 \dots i_h = 1}^{N} \underbrace{\frac{\partial^h f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_h}}}_{h \text{ derivate}} v_{1,i_1} \dots v_{h,i_h}$$

Se tutti i v_i sono uguali a un $v \Rightarrow$

$$f^{(h)}(x_0)(v \dots v) = \sum_{i_1 \dots i_h = 1}^{N} \frac{\partial^h f(x_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_h}} v_{i_1} \dots v_{i_h} = \text{(SI DIMOSTRA)}$$

ci sono N^h addendi - però molti sono ripetuti per es $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1}$

$$= \sum_{|\alpha| = h} \frac{h!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)\, v^\alpha$$

TIENE CONTO DELLE RIPETIZIONI

ES. Se $h = 3$ $N = 3$ il multiindice $(2,1,0)$ corrisponde all'addendo

$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x_0)\, v_1^2 v_2$ ← compare $\frac{3!}{2!\,1!\,0!} = 3$ volte

e cioè dai termini $\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}$ $\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}$ $\frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1}$

DUNQUE

$$\varphi^{(h)}(0) = f^{(h)}(x_0)(\underbrace{v,\dots,v}_{h}) = \sum_{|\alpha|=h} \frac{h!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)\, v^\alpha$$

Se torno indietro

$$f(x) = \varphi(1) = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x_0)(x-x_0)^h + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\underbrace{x_0+t_1(x-x_0)}_{\xi})(x-x_0)^{k+1}$$

$$= \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{\cancel{h!}} \sum_{|\alpha|=h} \frac{\cancel{h!}}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)\, \underset{x-x_0}{v^\alpha} + \frac{1}{\cancel{(k+1)!}} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\cancel{(k+1)!}}{\alpha!} \dots$$

$$= \underbrace{\sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha}_{P_{k,x_0}(x-x_0)} + \sum_{|\alpha|=k+1}\frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\xi_x)(x-x_0)^\alpha$$

sta sul segmento tra x_0 e x

#

FORMULA CON R. DI L.

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1}\frac{1}{\alpha!}D_\alpha f(\xi)(x-x_0)^\alpha$$

dove ξ è sul segmento tra x_0 e x

<u>TEOREMA 2</u> (Taylor con resto di Peano)

A aperto (non lo voglio convesso) $\qquad f\in C^k(A)$

Allora

$$\frac{o(\|x-x_0\|^k)}{\|x-x_0\|^k} \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

$$f(x) = P_{k,x_0}(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^k)$$

Dim. Mi metto in $\underbrace{B(x_0,\rho)}_{\text{CONVESSO}} \subset A$ per ρ piccolo. $\Rightarrow$

$$f(x) = P_{k-1,x_0}(x-x_0) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi_x)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha =$$

$$P_{k,x_0}(x-x_0) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\xi_x) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha}_{R_{k,x_0}(x-x_0)}$$

Noto che $|x_i - x_{0,i}| \le \|x-x_0\| \quad \forall i = 1 \dots N$

$$\Rightarrow |(x-x_0)^\alpha| =: |(x_1-x_{0,1})^{\alpha_1} \cdots (x_N - x_{0,N})^{\alpha_N}| \le \|x-x_0\|^{\alpha_1} \cdots \|x-x_0\|^{\alpha_N} = \|x-x_0\|^k$$

Allora $\left|\dfrac{R_{k,x_0}(x-x_0)}{\|x-x_0\|^k}\right| \le \sum_{|\alpha|=k} \left|\dfrac{D^\alpha f(\xi_x) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}\right| \xrightarrow{x\to x_0} 0$

tutte le derivate d-esime sono continue e $\xi_x \to x_0$ se $x \to x_0$

cioè $R_{k,x_0}(x-x_0) = o(\|x-x_0\|^k)$

FINE LEZIONE