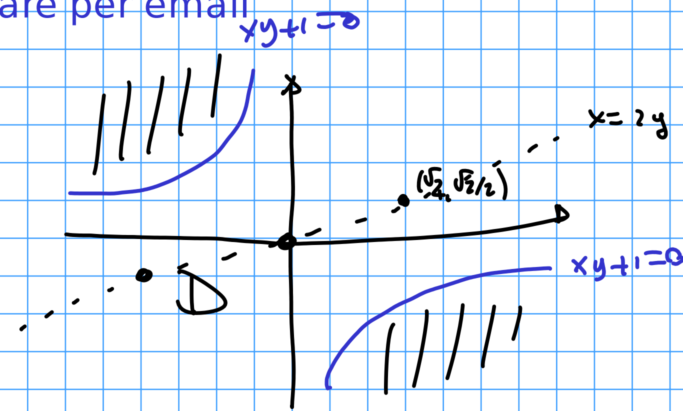
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 20 10/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email



$f(x,y) = -x - 4y^2 + 8\ln(1+xy)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1+xy > 0\}$

VISTO CHE $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = -\infty$

e $1+x_0y_0=0$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$

$\Rightarrow \nexists$ minimo $\exists$ max (weierstrass generalizzato)

• TROVATI 3 punti critici $(0,0)$ $\pm\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Dato che il max esiste $\Rightarrow$ deve essere assunto in uno di questi punti. Noto che $f(-x,-y) = f(x,y)$ quindi $f\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 - \frac{4}{2} + 8\ln\left(1+1\right) =$

$-4 + 8\ln(2)$ $\Leftarrow$ è positivo dato che

$-4+8\ln(2) > 0 \Leftrightarrow 8\ln(2) > 4 \Leftrightarrow 2\ln(2) > 1 \Leftrightarrow \ln(4) > 1$

$\Leftrightarrow \quad 4 > e$ VERO

- $f\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\ln(4) - 1\right) > 0$
- $f(0,0) = 0$

IL MAX è $4\left(\ln(4) - 1\right) > 0$

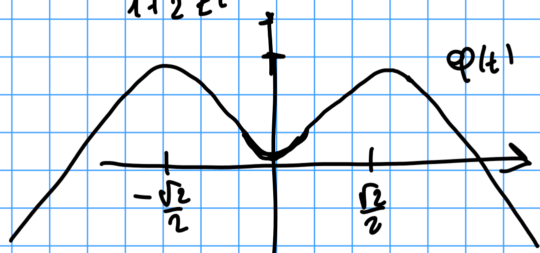
VEDIAMO (a "occhio") che $(0,0)$ è pto di sella.

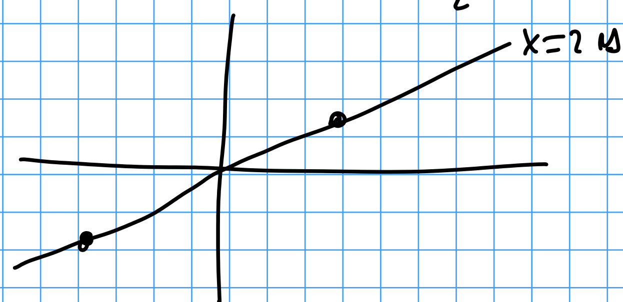
MI METTO SULLA RETTA $x = 2y$

$$\varphi(t) = f(2t, t) = -4t^2 - 4t^2 + 8\ln(1+2t^2) = -8t^2 + 8\ln(1+2t^2)$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi'(t) = -16t + 8\,\frac{4t}{1+2t^2} = 16t\left(\frac{2}{1+2t^2} - 1\right) =$$

$$\varphi'(t) = \frac{16t}{1+2t^2}\left(1 - 2t^2\right) \Rightarrow \text{si annulla in } t = 0 \quad t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

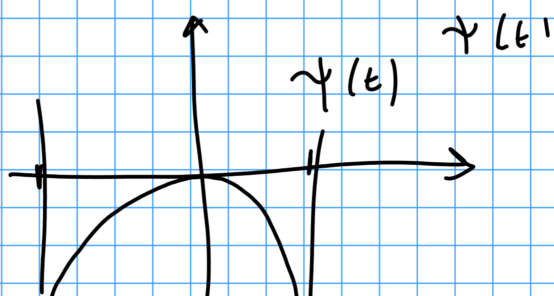


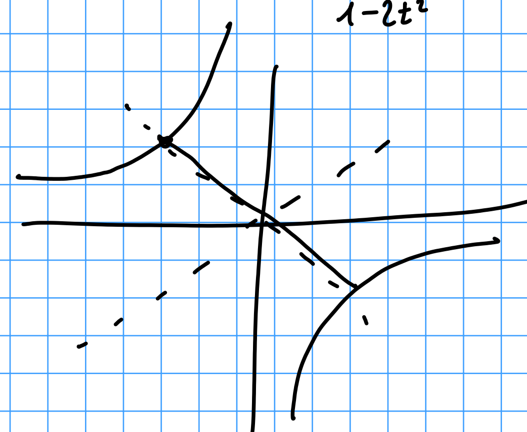


INVECE NELLA DIREZIONE PERPENDICOLARE $y = -2x$ trovo

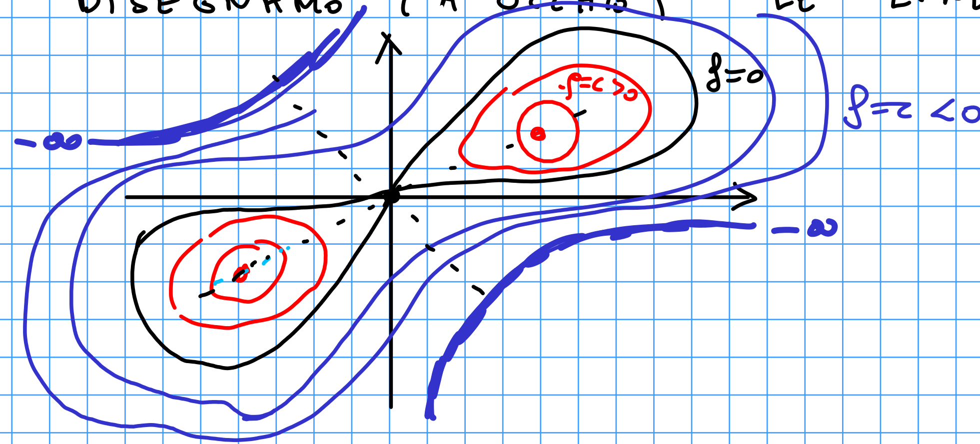
$$\psi(t) = f(t, -2t) = -t^2 - 16t^2 + 8\ln(1 - 2t^2)$$

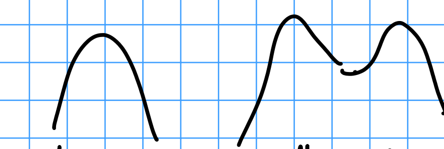
$$\psi'(t) = -17 \cdot 2t + \frac{8}{1-2t^2}(-4t) = -34t - \frac{32t}{1-2t^2}$$





DISEGNAMO (A OCCHIO) LE LINEE DI LIVELLO DI f





retta $y=-2x$ retta $x=2y$

DERIVATE SECONDE (E SUCCESSIVE)

Def. (derivate direzionali seconde (K-ESIME))

$f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A \subset \mathbb{R}$ $\quad A$ aperto $\quad x_0 \in A$

Dati $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^N$ def.

$$f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = g'(x_0)(\vec{v}) \quad \text{dove } g(x) = f'(x)(\vec{w})$$

derivata seconda di f in x_0 nelle direzioni $\vec{w}$ e $\vec{v}$

IN GENERALE dati $v_1 \dots v_k$ si definisce la derivata K-ESIMA DI f (in x) lungo $v_k \, v_{k-1} \dots v_1$

$$f^{(k)}(x_0)(v_1, \dots, v_k) = g'(x_0)(v_1) \quad \text{dove}$$

$$g(x) = f^{(k-1)}(x)(v_1, \dots, v_{k-1}) \quad \text{(iterativamente)}$$

NOTAZIONE scrivo: $f^{(k)}(x_0)\, v^k = f^{(k)}(x_0)(\underbrace{v, v, \dots, v}_{k\text{-volte}})$

DUNQUE
$$f''(x_0)\, v^2 = f''(x_0)(v, v)$$
$$f'''(x_0)\, v^3 = f'''(x_0)(v, v, v)$$
$$\vdots$$

DEF. DICO CHE f è differenziabile di ordine

2. (di ordine k) in x_0, se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sono differenziabili in x_0

NOTA queste $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (se tutte le derivate parziali di ordine $\leq k-1$ sono differenziabili)

Se ciò AVVIENE:

FISSO $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

$$g(x) := f'(x)\vec{w} = \underbrace{J_f(x)\, w}_{\in \mathbb{R}^M} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} w_j}_{\in \mathbb{R}^M}$$

$$g'(x_0)\vec{v} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)'(x_0)(v) \cdot w_j \leftarrow \text{se scambio con } \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \text{ gli indici}$$

$$\boxed{f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)\, v_k\, w_j} \quad \star$$

Scrivo $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}$ (* - per ora non $\neq \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}$)

DUNQUE Se f è diff. 2 volte $\Rightarrow$

$\star\star$ $(v, w) \mapsto f''(x_0)(v, w)$ è BILINEARE in v, w

[ALLORA (conseguenza del diff. tot.) se $\exists\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e sono continue in un punto x_0 $\Rightarrow$ f è diff. 2 volte e vale la formula $\star$]

- IN PARTICOLARE $v \mapsto f''(x_0)v^2$ è una forma quadratica
- Se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(M=1)$ chiamo MATRICE HESSIANA la matrice $N \times N$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N} \end{pmatrix} =: H_f(x_0)$$

Allora $\boxed{f''(x_0)(v,w) = v^t H_f(x_0)\, w}$ $f''(x_0)(v^2) = v^t H_f(x_0)\, v$

(è la formula ★)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \overset{??}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$ PUÒ ESSERE FALSO MA

TEOREMA (Schwartz) Se $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $i,j = 1 \cdots n$

CONTINUE IN x_0 $\Rightarrow$ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

(NO DIM.)

NE SEGUE Se f è di classe $C^2(A) \Rightarrow H_f(x)$ è una matrice simmetrica $\forall x \in A$ $f''(x)(v,w) = f''(x)(w,v)$

Def. Se $k \in \mathbb{R}$ chiamo $C^k(A;\mathbb{R}^m)$ le funzioni f tali che $\exists$ tutte le derivate parziali fino all'ordine k e sono continue.

- MOSTRIAMO ORA UN CONTROESEMPIO ALLA SIMMETRIA DI H_f

Definisco $$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \qquad f(0,0)=0$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

① f è diff. in $(0,0)$. Lo dimostro mediante il diff. tot.

Calcolo $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)(3x^2y - y^3) - 2x\, xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y\,\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x\,(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2+y^2)^2} = x\,\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Vediamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to 0$ a $(x,y) \to (0,0)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{6\,\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} \to 0 \quad \left(\begin{array}{l} |x| \leq \|x,y\| \\ |y| \leq \|x,y\| \end{array}\right)$$

Stesso discorso per $\frac{\partial f}{\partial y}$ ..

$\Rightarrow$ f è diff. .. ogni (x,y)

- Calcoliamo $f''(0,0)(\vec{v}, \vec{w})$ in . ..

e cioè $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{g(t\vec{v})}{t}}$

dove $g(x,y) = f'(x,y)\,\vec{w} = \nabla f(x,y)\,\vec{w} =$

$$y\,\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}\,w_1 + x\,\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}\,w_2 \leftarrow$$ LA DEVO DERIVARE in $(0,0)$ LUNGO $\vec{v}$

FINIAMO DOMANI

$g(0) = 0$