Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 19 09/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Esercizi (differenziabilità)

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$

(a) f è continua? (b) f è differenziabile?

(a) Cerco di dim. che f è continua

$$|xy^2| = \sqrt{x^2}\, y^2 \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+x^2} = \|(x,y)\|^3$$

$$|xy^2| = |xy||y| \leq \frac{x^2+y^2}{2}|y|$$

$$\Rightarrow |f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$

$$\leq \frac{|y|}{2}$$

DUNQUE f è continua in $(0,0)$ (negli altri punti è ovvio)

(b) f differenziabile in $(0,0)$ $\Longleftrightarrow$

$$\otimes \quad \boxed{\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0} \quad ??$$

perché $f(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Dunque la def. di differenziabilità (detta) si può scrivere $\quad P_0=(0,0)$

$$\frac{f(P)-f(P_0)-\nabla f(P_0)(P-P_0)}{\|P-P_0\|}\xrightarrow{P\to P_0}0$$

Devo quindi vedere se

$$\frac{x\,y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

Facciamo i limiti sulle rette: mi metto su $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$ e mando $\rho\to 0$ ($\theta\in[0,2\pi[$ FISSATO)

TROVO:

$$\frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^3}=\cos\theta\sin^2\theta \quad \boxed{\text{NON TENDE A ZERO}}$$

DUNQUE $\circledast$ NON TENDE A ZERO; f NON È DIFF. IN $(0,0)$.

ESERCIZIO Stessa domanda per $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ $\quad (f(0,0)=0)$

(a) f è continua perché lo si vede come sopra (f è la funzione di prima moltiplicata per x)

(b) Dico che f è differenziabile in $(0,0)$ e che $df(x_0)=0$ (cioè $df(x_0)(\vec{v})=0$ $\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^2$). Come prima ho che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \quad (\text{perché } f(x,0)=f(0,y)=0)$$

DUNQUE LA DIFFER. EQUIVALE A

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\underbrace{(x^2+y^2)^{3/2}}_{\|(x,y)\|^3}}=0$$

QUESTO È VERO DATO CHE

$$x^2y^2=(xy)^2\le\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=\frac{\|(x,y)\|^4}{4}$$

$$\Rightarrow\quad 0\le\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}\le\frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3}=\|(x,y)\|\longrightarrow 0$$

OSS. HO VERIFICATO LA DIFFERENZIABILITÀ USANDO LA DEFINIZIONE

SI PUÒ ARRIVARE ALLO STESSO RISULTATO COL TEOR. DEL DIFFERENZIALE TOTALE. VEDIAMO COME:

Devo dim. che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ esistono $\forall (x,y) \approx (0,0)$ e sono continue in $(0,0)$ $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \lim_{(x,y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad (**)$$

perché so che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Vediamo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Se $(x,y) \neq (0,0)$ la posso calcolare usando le "solite" formule

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} = \frac{2xy^2(\cancel{x^2}+y^2) - \cancel{x^2 y^2}\, 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

Devo dim che $\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$ Lo deduco da:

$$\frac{|2xy^4|}{\|(x,y)\|^4} \leq 2\frac{\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 2\|(x,y)\| \to 0 \qquad \left(\begin{array}{l} |x| \leq \|(x,y)\| \\ |y| \leq \|(x,y)\| \end{array} \right)$$

stesso discorso per $\frac{\partial f}{\partial y}$

ANCHE IN QUESTO MODO RITROVO CHE f è diff in $(0,0)$ e $df(0,0) = 0$ #

---

f è diff $\overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, L$ lineare : $\frac{f(x) - f(x_0) - L(x-x_0)}{\|x-x_0\|} \longrightarrow 0$

MA SI È VISTO CHE, se L esiste $\Rightarrow$ $Lv = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0)$

DUNQUE:

$$\left[f \text{ è diff} \Longleftrightarrow \exists\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \dots \frac{\partial f}{\partial x_N} \text{ e } \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x-x_0)_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0)(x-x_0)_N}{\|x-x_0\|} \to 0 \right]$$

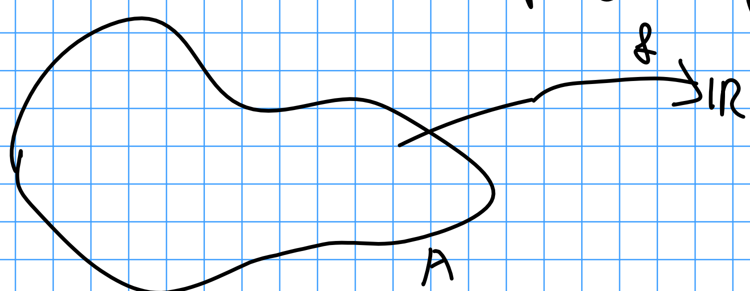
OSS. Ricordiamo:

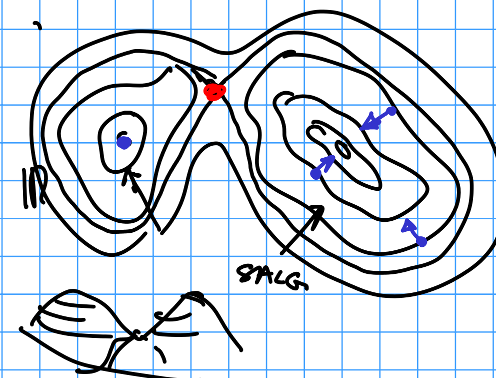
$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(\gamma(t_0))\cdot \gamma'(t_0)$$

DOVE f è $C^1(A,\mathbb{R})$ $\quad \gamma : [0,b] \to A$ è C^1

DA QUESTO RICAVO CHE

$\nabla f(P)$ è ORTOGONALE ALLA "LINEA DI LIVELLO" passante per P

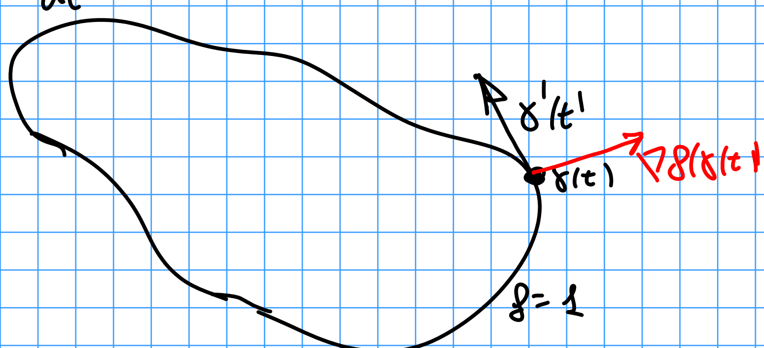




Prendo $\gamma : [0,b] \to A$ tale che $f(\gamma(t)) = \text{costante}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0 = \nabla f(\gamma(t))\cdot \underbrace{\gamma'(t)}$$

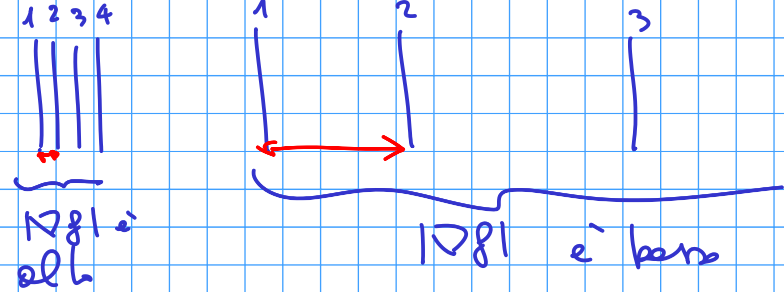
Tangente alla curva γ nel punto $\gamma(t)$



$N=2$ superficie

- $\nabla f(P)$ è perpendicolare alla (linea) di livello che passa per P $\quad$ (se $\nabla f(P) \neq 0$)

- <u>OSS.</u> $|\nabla f|(P)$ è tanto più grande, tanto più <u>vicine</u> sono le curve di livello



TEOREMA. $f : A \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n)$ A aperto **CONNESSO**

(dati P e Q in A $\exists$ γ curva C^1 a tratti che congiunge P e Q)

f $C^1(A)$. Allora

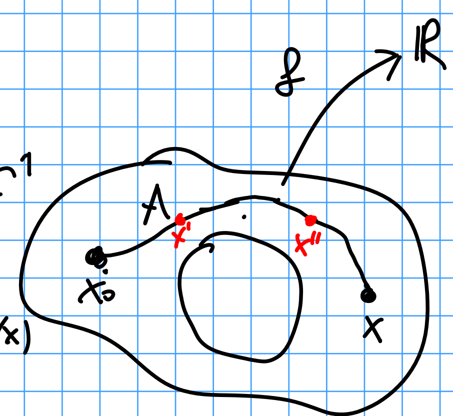
$$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in A \iff f(x) = \text{costante su } A$$

Dim. $\Leftarrow$ OVVIA. Se f = costante $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \nabla f = 0$

$\Rightarrow$ Prendo $x_0 \in A$ (a caso). Dato $x \in A$

Trovo una curva C^1 a tratti $\gamma : [0,1] \to A$ t.c.

$$\gamma(0) = x_0 \quad \gamma(1) = x$$



Supponiamo per semplicità che γ sia C^1

Considero $\varphi(t) = f(\gamma(t))$

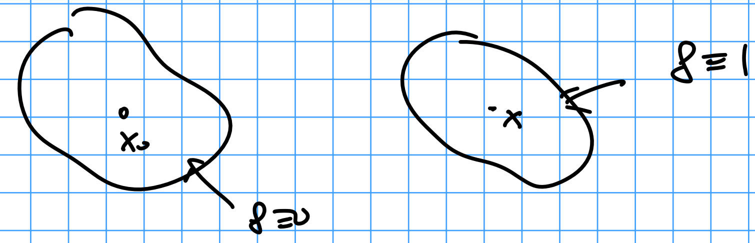
$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(0) = f(x_0) \quad \varphi(1) = f(x)$

$$\varphi'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{=0}\, \gamma'(t) = 0 \Rightarrow \varphi(1) = \varphi(0)$$

HO DIM. CHE $f(x) = f(x)$ $\forall x \in A$ $\#$

OSS. Se A non è connesso può succedere che

$f(x_0) \neq f(x)$

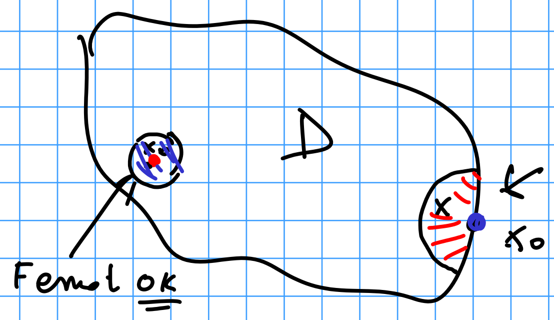


$D \in \mathbb{R}^N$ (non è detto che sia aperto)

Def. $x_0 \in D$ si dice punto di max / min relativo per $f: D \to \mathbb{R}$ se esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall x \in B(x_0, \rho) \cap A \implies f(x) \leq f(x_0) \quad \left(f(x) \geq f(x_0) \right)$$

($f(x_0)$ è un max / min relativo per f)



Fermat NON FUNZIONA

- PTI DI ESTREMO RELATIVO ($\in D$)
- (VALORI DI) ESTREMO RELATIVI ($\in \mathbb{R}$)

TEOREMA (di Fermat) • Se $f: D \to \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}^N$

x_0 è $\boxed{\text{interno}}$ a D (in particolare se D è aperto)

- Se x_0 è punto di estremo relativo (max / min)
- Se f ha derivate parziali in x_0

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1 \ldots N$$

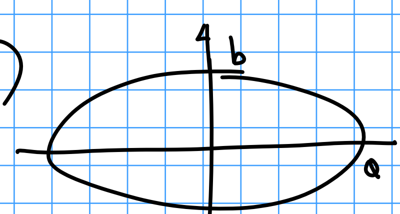
cioè $\nabla f(x_0) = 0$

PAUSA FINO ALLE 18.20

DOMANDA.

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ chiusa, $C^1(a,b)$

$\implies \|\gamma\|$ è costante $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$



$\gamma(t) = (a\cos(t),\ b\sin(t))$ $\qquad t \in [0, 2\pi]$

$\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{x} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{y}$

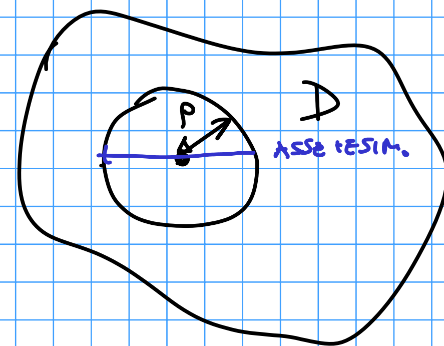
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\|\gamma(t)\| = a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)$

non è costante

DIM (di Fermat) Dato che x_0 interno al dominio D

$\exists\ \rho > 0$ t.c. $B(x_0, \rho) \subset D$



IN PARTICOLARE se prendo i tra 1 e N. Fisso le coordinate $\neq i$ e muovo solo $x_{0,i}$

$x_0 = (x_{01}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x_{0,i}}}{} \dots x_{0N}) \implies$

asse i-esimo

$x_{0,i}$ è di max/min relativo per f ristretta all'asse i-esimo $\implies \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_{01} \dots \underbrace{x_{0i}}_{\uparrow}\ x_{0N}) = 0$

cioè $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \qquad \forall i = 1 \dots N$

TESI

IN ALTRI TERMINI

I PUNTI DI ESTREMO RELATIVO DI f SU D VANNO CERCATI TRA:

- I PUNTI CRITICI (STAZIONARI) INTERNI A D
- I PUNTI DI FRONTIERA DI D (∂D)
- I PUNTI IN CUI $\nexists\ \nabla f$

(o STAZIONARIO)

Def. x_0 si dice pto critico per f se $\exists\ \nabla f(x_0) = 0$

ESEMPIO

CONSIDERO

$$f(x,y) = \underbrace{x^2+4y^2-2xy}_{\phi(x,y)} \underbrace{-2x-4y}_{\ell(x,y)}$$

DOMANDA

(i) f HA MAX ? se sì trovarlo (su $\mathbb{R}^2$!!)

(ii) f HA MIN ? se sì trovarlo NON LIMITATO

NOTA

$$f(x,y) = \phi(x,y) + \ell(x,y)$$

$\phi(x,y) = x^2+4y^2-2xy$ (forma quadratica)

$\ell(x,y) = -2x-4y = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (lineare)

OSS.

$f(x,0) = x^2-2x$ e $\lim_{|x|\to\infty} f(x,0) = +\infty$

$(f(0,y) = 4y^2-4y)$

$\nexists$ MAX ($\sup f = +\infty$)

Se dimostro che $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty \Rightarrow$ f HA MINIMO

(Dato che f è continua)

?? Devo vedere se la parte quadratica è >0

Devo guardare $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ $\left(\phi(x,y) = (x,y)\,A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$

Sylvester $\Rightarrow$ OK $\quad a_{11} = 1>0 \quad \det = 4-1 = 3>0$

$$\Rightarrow \boxed{\exists\ \nu>0 \text{ t.che } \phi(x,y) \geq \nu\|(x,y)\|^2}$$

D'altra parte $|\ell(x,y)| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right| \leq \sqrt{4+16}\,(x^2+y^2)^{1/2}$

$= \sqrt{20}\,\|(x,y)\|$

$$\Rightarrow f(x,y) \geq \nu\|(x,y)\|^2 - \sqrt{20}\,\|(x,y)\| \xrightarrow{\|(x,y)\|\to\infty} +\infty$$

DUNQUE SO CHE $\exists$ MINIMO

· Per Fermat. il pto di minimo è un pto critico per f

cioè $\nabla f(x,y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -2x + 8y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3y = 3 \quad \boxed{y=1} \quad \boxed{x=2}$$

L'UNICO PTO CRITICO È $(2,1)$!!

$$\Rightarrow \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(2,1) = 2^2 + 4\cdot(1)^2 - 2(2\cdot 1) - 2\cdot 2 - 4\cdot 1$$
$$4 + 4 - 4 - 4 - 4 = -4$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 8\ln(1+xy)$$

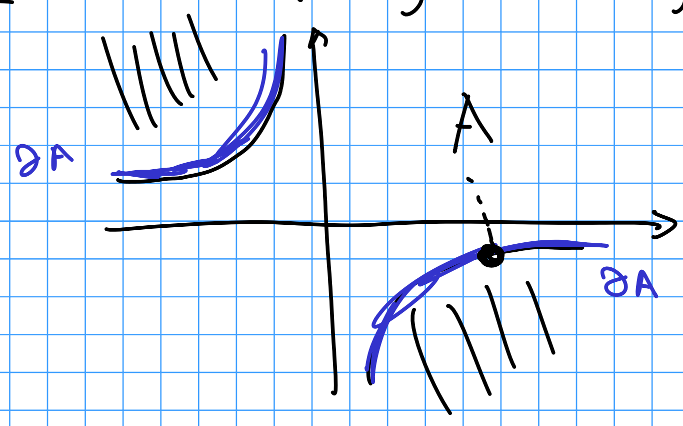
definita su $A = \{(x,y) : 1+xy > 0\}$ $\boxed{A \text{ è aperto} :}$

infatti $A = \{(x,y) : g(x,y) > 0\}$ con $\underbrace{g(x,y) = 1+xy}_{\text{CONTINUA}}$

A è il "sopralivello" di g relativo a zero:

$A = g^{-1}(\,]0,+\infty[\,)$ ← APERTO dato che $]0,+\infty[$ aperto in $\mathbb{R}$

NOTA $\partial A = \{(x,y) : 1+xy = 0\}$ (CI FIDIAMO!!)



OSS. Se $1 + x_0 y_0 = 0$

$(x_0,y_0) \in \partial A$ allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -x_0^2 - 4y_0^2 + 8\ln(0) \text{"} = \boxed{-\infty}$$

- NON ESISTE MINIMO (ASSOLUTO). $\inf_A f = -\infty$
- Se dimostro che $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = -\infty \Rightarrow \boxed{\exists \max}$

QUESTO LO VEDO COSÌ:

$$1+xy \le 1+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} \le 1+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) \le -x^2-y^2+8\ln(1+x^2+y^2)$$

$$= -\|(x,y)\|^2 + 8\ln(1+\|(x,y)\|^2)$$

So che $\lim_{\rho\to+\infty} -\rho^2+8\ln(1+\rho^2) = -\infty$ (gerarchia degli infiniti)

$$= \lim_{\rho\to+\infty} -\rho^2\Big(1+\underbrace{\frac{8\ln(1+\rho^2)}{\rho^2}}_{0}\Big)$$

$$\Rightarrow \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = -\infty$$

HO TROVATO CHE $\boxed{\exists \max_A f}$

VOGLIO CALCOLARLO: so che

il corrispondente pto di max deve essere pto critico

(A è aperto $(\partial A \cap A = \emptyset)$ e f è C^1 su A)

CERCHIAMO I PTI CRITICI

$$\begin{cases} -2x+\dfrac{8y}{1+xy}=0 \\ \dfrac{8x}{1+xy}-8y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x=\dfrac{4y}{1+xy}} \\ y=\dfrac{x}{1+xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = x\,\frac{1}{1+xy} = \frac{4y}{(1+xy)^2} \iff \begin{array}{l} y=0 \\ 1=\dfrac{4}{(1+xy)^2} \end{array}$$

SE $y=0$ TORNO INDIETRO $\Longrightarrow$ $(x,y)=(0,0)$

SE NO $\dfrac{2}{(1+xy)} = \pm 1$ MA -1 MI PORTA FUORI DA A

$\Rightarrow$ $\boxed{(1+xy) = 2}$ TORNO AL SISTEMA

$\begin{cases} x = 2y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = 1 \end{cases}$ $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \pm\sqrt{2}$

ALTRI DUE PTI $\longrightarrow$ $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$

$f(0,0) = 0$ $f\left(\pm\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -2 - 4\frac{1}{2} + 8\ln(1+1)$

$\underbrace{= -4 + 8\ln(2)}_{\text{MAX}}$

$\boxed{\text{FINIAMO DOMANI}}$