Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 18 04/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

UFFICIALE: Compitino il 21/11/20
alle 9.00

Ci sarà una "prova di compitino" prima di quello ufficiale.

Def. A aperto di $\mathbb{R}^N$.

$C^1(A;\mathbb{R}^M) = \{$funzioni da A in $\mathbb{R}^M$: $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^M$ $\forall x \in A$, CONTINUE, $i = 1 \cdots N\}$

$C^1(A) = C^1(A;\mathbb{R})$

Se $f \in C^1(A;\mathbb{R}^M) \Rightarrow f$ è diff. in ogni $x \in A$.

Matrice Jacobiana $J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$ (i indice di riga, j indice di colonna)

Sappiamo che $df(x_0)(\vec{v}) = J_f(x_0)\vec{v}$ (prodotto MATRICE × VETTORE)

$$f'(x_0)(\vec{v}) = J_f(x_0)\vec{v}$$

Def. Se $f: A \to \mathbb{R}$ $(M=1)$ diciamo "GRADIENTE" di f in x_0 il vettore $\nabla f(x_0) = J_f^T(x_0)$

$$J_f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N}\right]$$

cioè
$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \end{bmatrix}$$

PROD. SCALARE

CON QUESTA DEF. $J_f(x_0)(\vec{v}) = \boxed{\nabla f(x_0) \cdot \vec{v} = f'(x_0)(\vec{v})}$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N}\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_N \end{bmatrix}$$

CALCOLO DIFFERENZIALE

① (LINEARITÀ) $f, g: A \to \mathbb{R}^M$ $x \in A$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda f_j + \mu g_j)(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(x) \qquad \begin{matrix} i = 1 \dots N \\ j = 1 \dots M \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$J_{\lambda f + \mu g}(x) = \lambda J_f(x) + \mu J_g(x)$$

MATRICI $M \times N$

② (PRODOTTI) Se tra f e g è definito un "prodotto"

prodotto $g f$ $(\to \mathbb{R}^M)$ per esempio $g: A \to \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}^M$

$\qquad$ " " $\quad gf: A \to \mathbb{R}^M$ $\qquad f \cdot g$

(prod. scalare) $g \cdot f$ $(\to \mathbb{R})$.

prodotto vettore $g \wedge f$ $(\to \mathbb{R}^M)$

(cioè dove valga la proprietà distributiva rispetto alla somma)

TUTTI I RISULTATI SEGUONO DALLA FORMULA

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} f g = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}}$$

se $f, g: A \to \mathbb{R}$

$i = 1 \dots N$

NE DEDUCO che se ho un prodotto $\circledast$ $f * g$

Suppongo che f e g siano C^1 $\Rightarrow$

$$\boxed{\exists \ (f * g)'(x)(\vec{v}) = f'(x)(\vec{v}) * g(x) + f(x) * g'(x)(\vec{v})}$$

Se per esempio 1 $f : A \to \mathbb{R}^M$ e $g : A \to \mathbb{R}$ ottengo

$$\underset{\mathbb{R}^M}{\underset{\Uparrow}{(g \cdot f)'(x)(\vec{v})}} = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{g'(x)(\vec{v})}} \cdot \underset{\mathbb{R}^M}{\underset{\Uparrow}{f(x)}} + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{g(x)}} \, \underset{\mathbb{R}^M}{\underset{\Uparrow}{f'(x)(\vec{v})}}$$

$$'' (\nabla g \cdot \vec{v}) \cdot f(x) = A \cdot \vec{v}$$

Se voglio tradurre questa formula sugli Jacobiani trovo (si vede)

$$J_{g \cdot f}(x) = \underbrace{f(x) \otimes \nabla g(x)}_{A} + g(x) \, J_f(x)$$

dove dati due vettori u e v $\quad (u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$

Esempio 2 $\quad f, g : A \to \mathbb{R}^M$, considero il prodotto scalare

Per quanto detto sopra

$$(f \bullet g)'(x)(\vec{v}) = f'(x)(\vec{v}) \bullet g(x) + f(x) \bullet g'(x)(\vec{v}) =$$

$$\underset{\mathbb{R}^M}{\underset{\Uparrow}{(J_f(x) \vec{v})}} \bullet g(x) + (f(x) \bullet J_g(x)(\vec{v})) =$$

$$(x \cdot Ay = A^T x \cdot y)$$

$$= (J_f^T(x) \underset{\mathbb{R}^N}{\underset{\Uparrow}{g(x)}}) \bullet \underset{\mathbb{R}^N}{\underset{\Uparrow}{\vec{v}}} + J_g^T(x) f(x) \bullet \vec{v} = \nabla (f \cdot g)(x) \bullet \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\nabla (f \bullet g)(x) = J_f^T(x) \, g(x) + J_g^T(x) \, f(x)} \quad ☆$$

Si poteva arrivarci anche in modo più semplice(?) :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\cdot g(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{M} f_i(x)\, g_i(x) =$$

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_i(x)\, g_i(x)\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)\right) g_i(x)}_{\| \\ J_f^T(x)\, g(x)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{M} f_i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x)\right)}_{\| \\ J_g^T(x)\, f(x)}$$

$$\boxed{(J_f)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}}$$

Se $f = g \Rightarrow \quad h = f \cdot f \qquad h(x) = \|f(x)\|^2$ Allora

$h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^N \ni \nabla \|f\|^2 = 2 \underbrace{J_f^T}_{\substack{\text{MATRICE} \\ N \times M}} \underbrace{f}_{\in \mathbb{R}^M} \qquad (\star\star)$$

Se poi $\quad f(x) = x \quad (f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N)$ trovo $\quad J_f = I_d$

$$\nabla \|x\|^2 = 2x$$

(questo è semplice: $\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\, x_1^2 + \cdots + x_N^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^2 = 2x_i$

$$\nabla \|x\|^2 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_N \end{bmatrix} = 2x$$

ESEMPIO CONCRETO DI $(\star\star)$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy - z^2 \\ xyz \end{bmatrix}$

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & -2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$$

$$h(x) = \|f(x)\|^2 = \boxed{(xy - z^2)^2 + x^2 y^2 z^2} \leftarrow$$

$$\nabla h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(xy - z^2)y + 2xy^2z^2 \\ 2(xy - z^2)x + 2x^2yz^2 \\ -4(xy - z^2)z + 2x^2y^2z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2xy^2 - 2yz^2 + 2xy^2z^2 \\ 2x^2y - 2xz^2 + 2x^2yz^2 \\ -4xyz + 4z^3 + 2x^2y^2z \end{bmatrix}$$

PROVIAMO A RICAVARE LO STESSO RISULTATO USANDO ~~∇~~ ★

$$\nabla h(x,y,z) = 2\, J_f(x,y,z)^{\top} f(x,y,z) =$$

$$2 \begin{bmatrix} y & x & -2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} xy - z^2 \\ xyz \end{bmatrix} =$$

$$2 \begin{bmatrix} y & yz \\ x & xz \\ -2z & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy - z^2 \\ xyz \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} xy^2 - yz^2 + xy^2z^2 \\ x^2y - xz^2 + x^2yz^2 \\ -2xyz + 2z^3 + x^2y^2z \end{bmatrix}$$

TORNA CON QUELLO TROVATO SOPRA

PAUSA FINO ALLE 18.28

$(\nabla g \cdot \vec v) \cdot f(x)$

$\uparrow \vec u$ $\qquad$ $\vec w$

$\rightsquigarrow$ Dati $\vec u$ e $\vec w$ in $\mathbb{R}^M$ ho l'applicazione

$$\underset{\mathbb{R}^M}{\vec v \in} \longrightarrow (\vec u \cdot \vec v)\, \vec w \qquad + \text{ è lineare in } \vec v \,!\ \ \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$$

$$\| \qquad A \vec v \qquad \text{con } A \text{ matrice } M \times M$$

Si vede che $\boxed{A = \vec u \otimes \vec w \quad \text{def. da } (\vec u \otimes \vec w)_{ij} = u_i v_j}$

per esempio
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Potrei anche prendere $\vec u \in \mathbb{R}^M$ e $\vec w \in \mathbb{R}^M$ e $(\vec u \otimes \vec w)_{ij} = u_i v_j$

che è una matrice $M \times N$ che rappresenta l'applicazione lin.

$L : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ def. da $L \vec v = (\vec v \cdot \vec u)\, \vec w$

---

③ (COMPOSIZIONE) $\qquad A \subset \mathbb{R}^N \qquad B \subset \mathbb{R}^M$

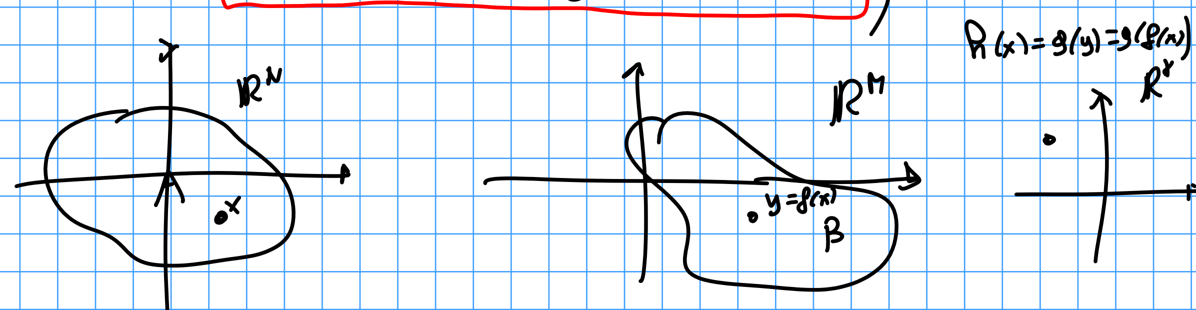
A, B aperti $\qquad f : A \to B \qquad g : B \to \mathbb{R}^K \qquad \boxed{C^1}$

Considero $h := g \circ f \qquad (h(x) = g(f(x)))$

ALLORA $\qquad x \in A \qquad y := f(x)$

$$J_h(x) = \underset{K \times N}{J_g(y)\, J_f(x)} = \underset{K \times M}{J_g(f(x))}\, \underset{M \times N}{J_f(x)}$$

(oppure $\underline{dh(x) = dg(y) \circ df(x)}$)



DIM. Fissiamo un punto $x_0 \in A$ e chiamiamo $y_0 = f(x_0) \in B$

So che (a) f è diff in x_0 e (b) g è diff. in y_0 $\iff$

(a) $$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + \underset{(x \to x_0)}{o(\|x-x_0\|)} \quad \forall x \in A$$

(b) $$g(y) = g(y_0) + dg(y_0)(y-y_0) + \underset{(y \to y_0)}{o(\|y-y_0\|)} \quad \forall y \in B$$

$$\Rightarrow h(x) = g(f(x)) \overset{(a)}{=} g(\overset{= y_0}{f(x_0)} + df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)) \overset{(b)}{=}$$

$$\underbrace{g(y_0)}_{h(x_0)} + dg(y_0)\left(df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)\right) +$$

$$+ o\left(\| df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)\right) =$$

$$h(x_0) + \left(dg(y_0) \circ df(x_0)\right)(x-x_0) + \underbrace{dg(y_0)\left(o(\|x-x_0\|)\right)}_{o(\|x-x_0\|)} + \quad (A)$$

$$+ \underbrace{o\left(\| df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)\right)}_{o(\|x-x_0\|)} = \quad (B)$$

dico che (A) e (B) sono $o(\|x-x_0\|)$ per $x \to x_0$

(1) Devo fare $$\frac{(A)}{\|x-x_0\|} = \underbrace{dg(y_0)}_{\text{NON DIPENDE DA } x}\left(\underbrace{\frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0 \text{ per def di } o(\cdot)}\right) \longrightarrow 0$$

(2) Prima "guardo dentro" $o(\quad)$

$$\| df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)\| \leq$$

$$\underbrace{\|df(x_0)\|}_{\text{FISSO}} \|x-x_0\| + \underbrace{\frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0} \|x-x_0\| \leq C\|x-x_0\|$$

C costante fissa

A questo punto scrivo

$$\frac{(B)}{\|x-x_0\|} = \frac{o\left(\| df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)\|\right)}{\|x-x_0\|} =$$

$$\frac{o\left(\|df(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\|\right)}{\|df(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\|}\;\frac{\|df(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\|}{\|x-x_0\|}$$

$$\leq C\,\frac{o\left(\|df(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\|\right)}{\|df(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\|}\xrightarrow{x\to x_0} 0$$

perché $y=\|df(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)\| \xrightarrow{x\to x_0} 0$

DUNQUE HO TROVATO

$$h(x) = h(x_0) + \underbrace{\left(dg(y_0)\circ df(x_0)\right)}(x-x_0) + \underset{(x\to x_0)}{o(\|x-x_0\|)}$$

$\Rightarrow$ HO TROVATO IL DIFFERENZIALE

$$dh(x_0) = \left(dg(y_0)\circ df(x_0)\right)$$

$$\simeq \boxed{J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))\,J_f(x)}$$

CONSEGUENZA — Se ricordo che $(J_f)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

La formula sopra ci dice:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{M}\left(J_g(f(x))\right)_{ik}\left(J_f(x)\right)_{kj}$$

$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{M}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)}$$

$$\boxed{(AB)_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj}}$$

Def. di prodotto AB se $A=[a_{ik}]$ $i=1\ldots$

A è $K\times M$ $\quad$ B è $M\times N$ $\quad$ $AB = K\times N$

$A = \{a_{ik}\}$ $\quad i = 1 \ldots$, $k = 1 \ldots M$ $\qquad B = \{b_{kj}\}$ $\quad k = 1 \ldots M$, $j = 1 \ldots N$ $\qquad (AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

$$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)} \quad \boxtimes$$

Se $K = 1$ posso scrivere $\quad (g \circ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R})$

$$\nabla (g \circ f) = J_f^{\perp}(x) \, \nabla g(f(x))$$

di nuovo da $\boxtimes$ mettendo $i = 1$

$$\boxed{J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \, J_f(x)}$$

$$\nabla g \circ f^{\perp} = \nabla g(f(x))^{\perp} J_f(x)$$

$$\Updownarrow$$

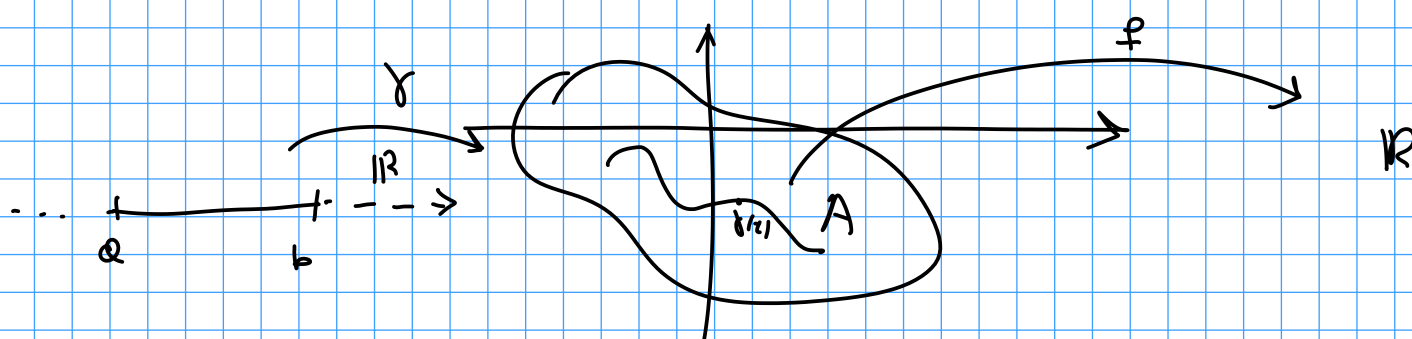
$$\nabla g \circ f = J_f^{\perp}(x) \, \nabla g(f(x))$$

<u>CASO IMPORTANTE</u> $\quad g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$

CAMBIO I NOMI e considero

$$\left.\begin{aligned} f &: A \to \mathbb{R} \qquad A \subset \mathbb{R}^N \\ \gamma &: [a,b] \to A \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$$

STO CONSIDERANDO LA RESTRIZIONE DI f su una curva γ



Come si scrive la derivata di $f \circ \gamma$ $\quad \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$??

APPLICARE $\boxtimes$ con f al posto di g e γ al posto di f

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

f è $C^1(A)$

γ è un arco C^1

$$(\nabla) \quad \boxed{\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$$

<u>OSS.</u> Se $\gamma(t)$ è la retta $\gamma(t) = P_0 + t\vec{v}$ ottengo la cosa nota.

$$f'(P_0)(\vec{v}) = \frac{d}{dt} f(P_0 + t\vec{v})\Big|_{t=0} = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v}$$

INTERPRETAZIONE DEL VETTORE GRADIENTE $(f : A \to \mathbb{R})$

Poiché $\quad f'(x_0)(\vec{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \quad (\bullet) \quad |f'(x_0)(\vec{v})| \le \|\nabla f(x_0)\| \, \|\vec{v}\|$$

se per esempio $\|\vec{v}\| = 1 \quad \Rightarrow \quad$ (A) $\boxed{|f'(x_0)(\hat{v})| \le \|\nabla f(x_0)\| \quad \forall\, \hat{v} \text{ con } \|\hat{v}\| = 1}$

- Se $\nabla f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0)(\hat{v}) = 0 \quad \forall\, \hat{v}$

Supponiamo $\nabla f(x_0) \neq 0$

Se in $(\bullet)$ metto $\hat{v} = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ (ha norma 1) trovo

(B) $$f'(x_0)(\hat{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \frac{\|\nabla f(x_0)\|^2}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\|$$

(A) + (B) $\Rightarrow$ La "direzione" di $\nabla f(x_0)$ è quella lungo cui $f'(x_0)\hat{v}$ è massimo (se $\nabla f(x_0) \neq 0$)

($\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ è il punto di max di $f'(x_0)(\hat{v})$

La norma di $\nabla f(x_0)$ (cioè $\|\nabla f(x_0)\|$) è

il valore massimo di $f'(x_0)(\hat{v})$ tra tutti i $\hat{v}$ di norma 1

$\|\nabla f\|$ è il max