Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 17 03/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Definita la "differenziabilità" e il differenziale per una

$$f : A \to \mathbb{R}^M \qquad A \text{ aperto} \quad A \subset \mathbb{R}^N \quad x_0 \in A$$

<u>Teorema</u> (DIFFERENZIA TOTALE)

Se esistono $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ $i = 1 \ldots N$ <u>in ogni x</u> di A (di $B(\rho, x_0)$ $\rho > 0$)

e se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono continue in x_0 $\Longrightarrow$

f è differenziabile in x_0

<u>OSS.</u> (sulla def. di diff.) Da quanto detto risulta che

(a) f è differenziabile in x_0

SE E SOLO SE

(b) $\exists \; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0)$ e posto ↖ vettori in $\mathbb{R}^N$ (numeri se $M=1$)

$$\bar{\ell}(\vec{v}) = \ell(v_1, \ldots, v_N) = v_1 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} + \cdots + v_N \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_N} \qquad \left(\begin{array}{l}\bar{\ell} \text{ è lineare} \\ \text{da } \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M\end{array}\right)$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \bar{\ell}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0 \qquad (\ast)$$

Dim. $(b) \Rightarrow (a)$ per come è scritta la def di differenziale

$(a) \Rightarrow \exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ e che $df(x_0)(v) = \bar{l}(v)$

Dim (del t. diff. tot.). Per l'osservazione fatta sopra mi basta:

esistono per ipotesi

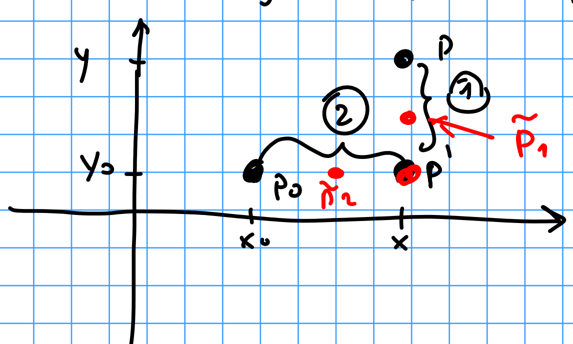
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i})}{\| x - x_0 \|} = 0$$

Per semplicità considero $M=1$ e $N=2$. DUNQUE devo dim.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\boxed{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)} =: \Delta(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Chiamo $\Delta(x,y)$ il numeratore sopra. Allora $\Delta(P_0) = 0$

chiamo $P = (x,y)$ $P_0 = (x_0, y_0)$. Dimostro che $\dfrac{\Delta(P) - \Delta(P_0)}{\| P - P_0 \|} \xrightarrow{P \to P_0} 0$



INTRODUCO $P' = (x, y_0)$

$$\Delta(P) - \Delta(P_0) =$$
$$\underbrace{\Delta(P) - \Delta(P')}_{1} + \underbrace{\Delta(P') - \Delta(P_0)}_{2}$$

NOTA CHE $\Delta(P) - \Delta(P')$ ho y variabile e x fisso

$$\Rightarrow \Delta(P) - \Delta(P') = \Delta(x,y) - \Delta(x,y_0) =$$

$$\left(\frac{\Delta(x,y) - \Delta(x,y_0)}{y - y_0} \right)(y - y_0) = \quad \text{(usando Lagrange rispetto a } y\text{)}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y}(x, \eta_{x,y})(y - y_0) \quad \text{per un opportuno } \eta \text{ tra } y \text{ e } y_0$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{xy}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right)(y - y_0) = \Delta(P) - \Delta(P')$$

$$\Rightarrow \|\Delta(P)-\Delta(P')\| \le \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta_{xy}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| |y-y_0| \le$$

$\tilde{P}_1$

$$|y-y_0| = \sqrt{|y-y_0|^2} \le \sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta_{xy}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| \|P-P_0\|$$

Analogamente

$$\Delta(P')-\Delta(P_0) = \Delta(x,y_0)-\Delta(x_0,y_0) =$$

$$\frac{\Delta(x,y_0)-\Delta(x_0,y_0)}{x-x_0}(x-x_0) =$$ uso Lagrange rispetto a x

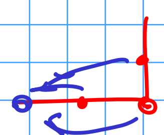
$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}(\xi_{x,y_0}, y_0)(x-x_0) =$$ dove ξ_{x,y_0} è compreso tra x e x_0

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{x,y_0},y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0) = \Delta(P')-\Delta(P_0)$$

$$\Rightarrow \|\Delta(P')-\Delta(P_0)\| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{xy_0},y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| \|P-P_0\|$$

(come fatto nel I° caso). Allora

$$\frac{\Delta(P)-\Delta(P_0)}{\|P-P_0\|} \le$$



$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta_{xy}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{xy_0},y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{xy_0},y_0) \xrightarrow{P\to P_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta_{xy}) \xrightarrow{P\to P_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) \xrightarrow{P\to P_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

a causa della continuità di $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

e perché $(x,\eta_{xy}) \to (x_0,y_0)$ $\quad (\xi_{xy_0}, y_0) \to (x_0,y_0)$

$(x,y_0) \to (x_0,y_0)$

DUNQUE $\lim_{P\to P_0}\frac{\Delta(P)-\Delta(P_0)}{\|P-P_0\|} = 0$ e il teorema è dimostrato.

#

Def Chiamo $C^1(A) = \{$ funzioni con $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continue, $i = 1 \dots N \}$

DUNQUE Se f è $C^1(A) \Rightarrow f$ è differenziabile in ogni $x \in A$.

Esempio $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

f HA SEI DERIVATE PARZIALI:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = y \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = yz \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = xz \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = xy$$

IN ALTRI TERMINI LA MATRICE JACOBIANA

$$J_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & -2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$$

Si vede subito che tutte queste derivate sono funzioni continue di $(x,y,z) \Rightarrow f$ è differenziabile.

Se prendo $P_0 = (1,1,1)$ allora la matrice diventa

$$J_f(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

DUNQUE

$$df(P_0)(\underbrace{v_x, v_y, v_z}_{\vec{v} \in \mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_x + v_y - 2v_z \\ v_x + v_y + v_z \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}^2}$$

Ne segue per esempio che

$$f'(P_0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Verifichiamolo a partire dalla def di derivata direzionale

$$f'(1,1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}(1+t)(1-t)-(1+2t)^2\\(1+t)(1-t)(1+2t)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \begin{bmatrix}(1-t)-(1+t)-2(1+2t)\cdot 2\\(1-t)(1+2t)-(1+t)(1+2t)+2(1+t)(1-t)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

$$\begin{bmatrix}1-1-4\\1-1+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$$ TORNA

#

<u>OSS.</u> Il ker del diff. tot. non è "invertibile"

NON È DETTO CHE

f DIFFERENZIABILE $\Rightarrow$ f C^1

Non si può dire che: "dato che $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ NON SONO CONTINUE $\Rightarrow$ f non è diff."