Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 16 02/11/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

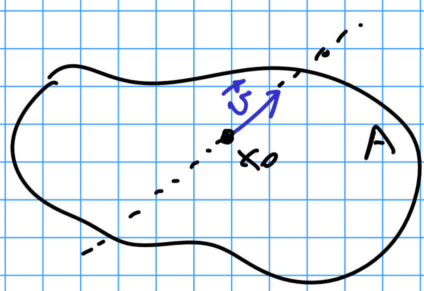
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

La volta scorsa: DERIVATA DIREZIONALE di una $f: A \to \mathbb{R}^M$

$A \subset \mathbb{R}^N$ A aperto $x_0 \in A$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$

$$f'(x_0)(\vec{v}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} \quad \left(\in \mathbb{R}^M \right)$$

(se $f: A \to \mathbb{R}$ $f'(x_0)(\vec{v}) \in \mathbb{R}$)



Nota se dico

$r(t) = x_0 + t\vec{v}$ $t \in \mathbb{R}$

questa è una curva $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$

che ha come sostegno una retta passante per x_0 ($r(0) = x_0$)
e tale che $r'(t) = \vec{v}$ $\forall t$ (in particolare $r'(0) = \vec{v}$)

allora $\boxed{f'(x_0)(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(f \circ r)\Big|_{t=0}}$

Def. Se $\vec{v} = \hat{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$-ESIMA, allora scrivo

$D_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \underset{(def)}{:=} f'(x_0)(\hat{e}_j) =$

$$= \lim_{\xi \to x_{0,i}} \frac{f(x_{0,1}, \dots, \xi, \dots x_{0,N}) - f(x_{0,1} \dots x_{0,N})}{\xi - x_{0,j}}$$

è la derivata di $f(x_{0,1} \dots x_{0,j-1}, \xi, x_{0,j+1}, \dots, x_{0,N})$, cioè della funzione f VISTA COME FUNZIONE DELLA VARIABILE j-ESIMA, TENENDO FISSE LE ALTRE

Per esempio se $A \subset \mathbb{R}^2$ ci sono due derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$ CHE DI SOLITO

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'(x,y)(1,0) = f'(x,y)(\hat{e}_1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'(x,y)(0,1) = f'(x,y)(\hat{e}_2)$$

ESEMPI CONCRETI IN $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$$

Se prendo un vettore generico $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$$f'(x,y)(v_x, v_y) = \frac{d}{dt} f(x + t v_x, y + t v_y)\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}(x + t v_x)^2 (y + t v_y)\Big|_{t=0} = \text{(derivata del prodotto)}$$

$$\left[2(x + t v_x) v_x (y + t v_y) + (x + t v_x)^2 v_y\right]_{t=0} =$$

$$2xy v_x + x^2 v_y = f'(x,y)(v_x, v_y)$$

se $\begin{matrix} v_x = 1 \\ v_y = 0 \end{matrix}$ TROVO $2xy \left(= \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ se $\begin{matrix} v_x = 0 \\ v_y = 1 \end{matrix}$ TROVO $x^2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ #

AVEVAVO GIA' VISTO CHE anche se

$f'(x_0)(\vec{v})$ esiste per ogni $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^N$

NON È DETTO CHE f sia continua in x_0.

DEF. (differenziale) Siano come sopra $f: A \to \mathbb{R}^M$

$A \subset \mathbb{R}^N$ A aperto $x_0 \in A$.

Sia $\ell: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ un'applicazione lineare.

Dico che ℓ è "un differenziale" di f in x_0 se

$$(*) \quad \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0} \quad (0_M \in \mathbb{R}^M)$$

IN ALTRI TERMINI ℓ è un differenziale se

$$f(x) - f(x_0) - \ell(x-x_0) = o(\|x-x_0\|) \quad \left(\text{intendendo che } \frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|} \xrightarrow{x \to x_0} 0\right)$$

e anche che

$$(**) \quad f(x) = f(x_0) + \ell(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

$(*) \Leftrightarrow (**)$ usando $o(x) = f(x) - f(x_0) - \ell(\|x-x_0\|)$

Nel caso in cui $\boxed{N = M = 1}$, ℓ è lineare da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(\ell(x) = mx$ con $m \in \mathbb{R})$; $(*)$ mi dice:

ℓ è un diff. $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0) - m(x-x_0)}{x-x_0} = 0$

CASO $N=1$

$\Leftrightarrow$ f è derivabile e $m = f'(x_0)$

DUNQUE esiste un differenziale $\Leftrightarrow$ f è derivabile

e l'unico differenziale è $\ell(x) = f'(x_0)\, x$

Sempre nel caso $N = 1$ la $**$ si interpreta dicendo che

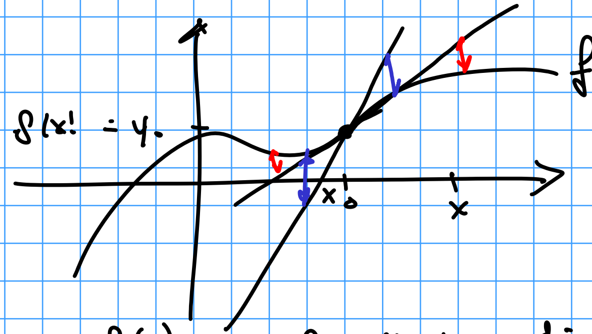
$$f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(|x-x_0|)$$

$$\Updownarrow$$

$$m = f'(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

la retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, tra tutte le rette passanti per $(x_0, f(x_0))$, è l'unica



che approssima $f(x)$ a meno di $o(|x-x_0|)$ (va a zero più rapidamente di $x-x_0$)

questo è l'idea che si usa anche in $\mathbb{R}^N$

In questo caso dunque essere differenziabile ($\Leftrightarrow$ essere derivabile) $\Leftrightarrow$ avere una retta tangente al grafico di f, in $(x_0, f(x_0))$

DEF (CONT.) Se esiste l come sopra si dice che f è differenziabile in x_0

VEDIAMO TRA POCO che se $\exists$ l come sopra $\Rightarrow$ l è UNICA che viene detto IL DIFFERENZIALE di f in x_0 e si indica con $df(x_0)$ $\left(df(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \right)$

ha senso $df(x_0)(\vec{v}) \in \mathbb{R}^M$ per $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$

Tra tutte le app. lineari da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $df(x_0)$ è l'unica per cui $f(x) = \underbrace{f(x_0) + l(x-x_0)}_{r(x)} + o(\|x-x_0\|)$

$r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è AFFINE

$y = r(x)$ è l'equazione dello "spazio tangente" al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

ESEMPIO La funzione $f(x,y) = x^2 y$ $P_0 = (1, 0)$

Cerchiamo (usando la definizione) di capire se f è differenziabile in P_0. ($A = \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $N = 2$, $M = 1$)

Prendo una generica $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare, $\Longleftrightarrow$ prendo due numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\boxed{\ell(\xi, \eta) = \alpha \xi + \beta \eta}$

$(\alpha = \ell(1,0)$, $\beta = \ell(0,1))$. f è diff in $P_0 \Longleftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - \ell(x-1, y-0)}{\|(x-1, y-0)\|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2 y - 0 - \alpha(x-1) - \beta y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \xrightarrow{(x,y)\to(1,0)} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{((x-1)+1)^2 y - \alpha(x-1) - \beta y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \to 0$$

$$\Updownarrow$$

1 $$\frac{(x-1)^2 y + 2(x-1)y + y - \alpha(x-1) - \beta y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \xrightarrow{(x,y)\to(1,0)} 0$$

$(x-1) \to x'$

$$\Updownarrow$$

2 $$\frac{x'^2 y + 2x' y + y - \alpha x' - \beta y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} \xrightarrow{(x',y)\to(0,0)} 0$$

se questo limite fa zero, $\Rightarrow$ fa zero sugli assi $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\alpha x}{|x|} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

(altrimenti il limite non esiste $\frac{x}{|x|}$ NON HA LIMITE)

$$\lim_{y\to 0} \frac{y(1-\beta)}{|y|} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

Dunque se f è diff. in $P_0 \Rightarrow \ell(\xi,\eta) = 0\cdot\xi + 1\cdot\eta = \boxed{\underset{df(P_0)(\eta,\xi)}{\overset{\shortparallel}{\eta}}}$

Ragioniamo allo rovescio e mostriamo che, se metto $\alpha=0, \beta=1$ effettivamente il limite (2) fa zero. INFATTI

$$(2) = \frac{x^2 y + 2xy + \cancel{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \cancel{y} =$$

$$\Delta(x,y) = \frac{x^2 y + 2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

VERO dato che

$$\left.\begin{aligned} x^2 y &\le |x|\frac{x^2+y^2}{2} \\ 2xy &\le x^2+y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$|\Delta(x,y)| \le \frac{|x|\sqrt{x^2+y^2}}{2} + \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$$

DUNQUE $x^2 y$ È DIFF. IN $(1,0)$ e

$$df(1,0)(\xi,\eta) = \eta$$

(cioè $df(1,0)$ si rappresenta con la matrice 1×2 $[0,1]$)

$$df(1,0)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = [0,1]\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \eta$$

#

PAUSA FINO ALLE 16.30

TEOREMA Se f è differenziabile in x_0 e se ℓ è "un differenziale", allora

f ammette derivata direzionale in x_0 lungo qualsiasi direzione $\vec{v}$ e <u>VALE</u>

$$f'(x_0)(\vec{v}) = df(x_0)(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

(se $\vec{v} = 0$ è ovvio)

<u>Dim.</u> So che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

$\Rightarrow$ dato $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $\quad \vec{v} \neq 0$ e considero $x = x_0 + t\vec{v}$ $\quad t > 0$

(limite sulle restrizioni)

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - \ell(t\vec{v})}{\|t\vec{v}\|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} - \ell(\vec{v}) \right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

A $$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = \ell(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

Se prendo $-\vec{v}$ al posto di v ho:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 - t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = -\ell(\vec{v})$$

$\|$ (cambio di variabile nel limite $s = -t$

$$\lim_{s \to 0^-} \frac{f(x_0 + s\vec{v}) - f(x_0)}{-s} = -\ell(\vec{v})$$

$\Updownarrow$ (s lo chiamo di nuovo t)

$$\cancel{-} \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = \cancel{-}\ell(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v}$$ B

(A) + (B) $\Rightarrow$

$$f'(x_0)(\vec{v}) = \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t}}_{\text{esiste! }} = \ell(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

\#

DUNQUE $\boxed{f'(x_0)(\vec{v}) = \ell(\vec{v})}$ per ogni (possibile) differenziale

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\ell \text{ è UNICO}}$ dato che conosco $\ell(\vec{v})$ per ogni $\vec{v}$

Nota $f'(x_0)(\vec{v})$ è unico per l'unicità del limite (in t)

D'ora in poi scrivo $df(x_0)$ invece di ℓ

OSS. Se f è differenziabile $\Rightarrow$ $f'(x_0)(\vec{v})$ È LINEARE IN $\vec{v}$!!

Questa è una condizione necessaria per la differenziabilità.

PROP. Se f è differenziabile in x_0 $\Rightarrow$ f è continua in x_0

Dim. Si ha:

$$f(x) = (f(x)-f(x_0)) + \overset{+\,\text{diff}\,-\,\text{diff}}{\vee}\, f(x_0) =$$

$$f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)-d(f(x_0))(x-x_0)}{\|x-x_0\|}\right)}_{\to\, 0}\underbrace{\|x-x_0\|}_{\to\, 0} + \underbrace{df(x_0)(x-x_0)}_{\to\, 0}$$

se $x\to x_0$ $\quad f(x_0)$

DUNQUE $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} f(x_0)$ \#

Def. Supponiamo che f sia diff in x_0. Allora

$$df(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \quad \text{lineare}$$

Allora esiste una matrice $M\times N$, indicata con $J_f(x_0)$

tale che

$$df(x_0)(\vec{v}) = \underbrace{J_f(x_0)[\vec{v}]_{\hat{B}}}_{\rightarrow} \qquad \hat{B} = (e_1 \dots e_N)$$

$$df(x_0)(v_1 \dots v_N) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{1N} \\ \vdots & \\ j_{M1} & j_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

IN PARTICOLARE se $\vec{v} = \hat{e}_i$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = df(x_0)(\hat{e}_i) = J_f(x_0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{1N} \\ \vdots & \vdots \\ j_{M1} & j_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i =$$

$$= \begin{bmatrix} j_{1i} \\ \vdots \\ j_{Mi} \end{bmatrix} = \text{colonna } i\text{esima di } J_f(x_0)$$

DUNQUE $J_f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right] =$

$$\left(f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x)) \right) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dots & , \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

CIOÈ la componente (i,k) di $J_f(x_0)$ è

$$\circledast \longrightarrow j_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

QUESTA MATRICE $J_f(x_0)$ si chiama

$$\boxed{\text{MATRICE JACOBIANA DI } f \text{ in } X_0}$$

$\circledast$ si scrive meglio come $\mathbf{J}_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

TUTTO QUESTO SE SO che f è differenziabile

Se non lo è la matrice Jacobiana non è molto utile - AMMESSO che esista

AVEVAMO VISTO L'ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \qquad f(0,0)=0$$

Allora $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \Rightarrow J_f(0,0) = [0,0]$

Però $f'(0,0)(v_x, v_y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t v_x (t v_y)^2}{t^2 v_x^2 + t^4 v_y^4} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + v_y^4} \begin{cases} \quad \text{se } v_x \neq 0 \\ 0 \text{ se } v_x = 0 \end{cases}$$

$\neq$

$[0,0]\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = 0$

IPOTESI DATA COMPITINO

SABATO 27/2 ore 9.00