Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 15 28/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Def. Sia $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^N$ una curva di classe C^1 e supponiamo che $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^N$, $\vec{f}$ continua. Allora definisco l'integrale curvilineo di II^a specie di $\vec{f}$ su γ

$$\boxed{\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \qquad (\in \mathbb{R})}$$

(~ il lavoro di un campo di forze lungo γ)

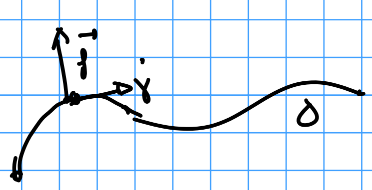
$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

NOTA

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \underbrace{(\vec{f} \cdot \hat{T})}_{\text{PROIEZIONE DI } \vec{f} \text{ sulla direzione tangente alla curva}} ds$$

dove $\hat{T}$ = vettore tangente alla curva di norma 1

$$\hat{T} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \qquad (se\ \gamma' \neq 0)$$



?

IN EFFETTI:

$$\int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \Bigg(\vec{f}(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}_{\hat{T}} \Bigg) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

TEOREMA (indipendenza dai cambi di parametro - CHE NON CAMBIANO VERSO)

$\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^N$, $\vec{f} : A \to \mathbb{R}^N$

Se $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ biettiva, C^1, $\underbrace{\varphi(c)=a,\ \varphi(d)=b}$

(φ MANTIENE IL VERSO)

Definisco $\gamma_1 : [c,d] \to A$

$$\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \qquad \left(\gamma_1'(s) = \gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

Dim.

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_c^d \vec{f}(\gamma_1(s))\cdot \gamma_1'(s)\,ds =$$

$$\int_c^d \vec{f}(\gamma(\varphi(s)))\cdot \gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds$$

CAMBIO DI VARIABILE $t = \varphi(s)$

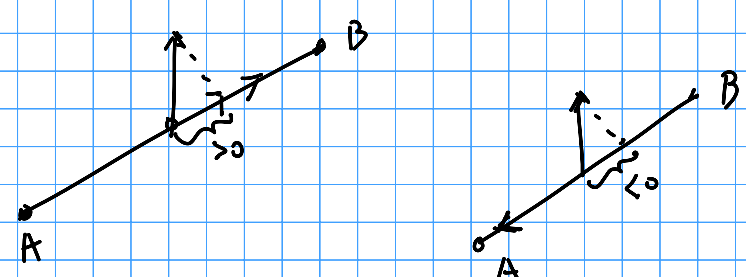
$$\int_{\varphi(c)=a}^{\varphi(d)=b} \vec{f}(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

SE INVECE $\varphi(c)=b$ $\varphi(d)=a$ $\Rightarrow$ STESSI CALCOLI $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \dots = \int_b^a \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = -\int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = -\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{s}$$

Se γ_1 è riparametrizzato di γ $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \begin{cases} \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} & \text{se } \gamma_1 \text{ ha lo stesso verso di } \gamma \\ -\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} & \text{se } \gamma_1 \text{ ha verso opposto di } \gamma \end{cases}$$

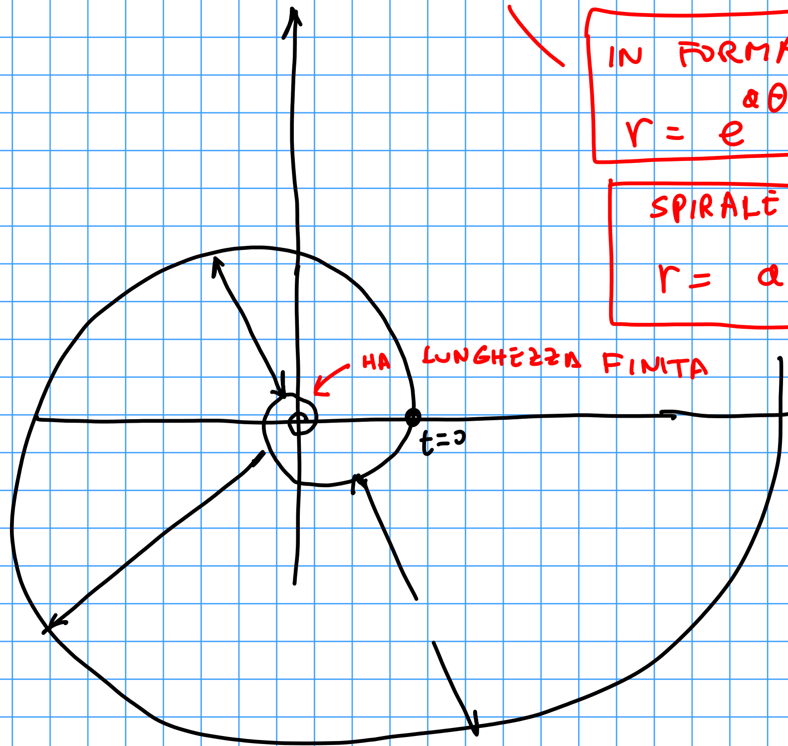


ESEMPIO

$\boxed{a>0}$

$$t \in \mathbb{R} \qquad \gamma(t) = e^{at}(\cos(t), \sin(t))$$

(SPIRALE LOGARITMICA)



IN FORMA DI COORD POLARI

$r = e^{a\theta}$

SPIRALE ARCH.

$r = a\theta$

· calcoliamo la lunghezza di γ da t_1 e t_2 con $t_1 < t_2$

$$\gamma'(t) = a e^{at} \boxed{(\cos(t), \sin(t))} + e^{at} \boxed{(-\sin(t), \cos(t))}$$

$$= a e^{at} \hat{\gamma}(t) + e^{at} \hat{\gamma}'(t)$$

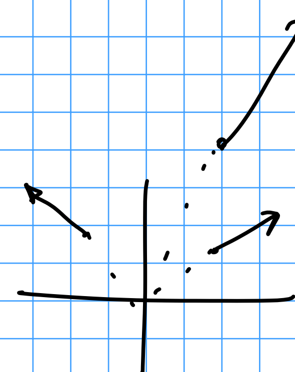
ORTOGONALI E DI NORMA UNO

$$\|\gamma'(t)\|^2 = a^2 e^{2at} + e^{2at} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2+1}\, e^{at}$$

$$\ell(\gamma|_{[t_1,t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2+1}\, e^{at} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\left(e^{at_2} - e^{at_1}\right)$$

NOTA se $t_1 \to -\infty \Rightarrow$

$$\ell(\gamma|_{]-\infty,t]}) = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} e^{at}$$



· CONSIDERO ORA $\vec{g}(x,y) = (x,y)$

$$\int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{g}(\gamma(t))}_{=\gamma} \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$\otimes \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t) \cdot \gamma'(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(e^{ta} \hat{\gamma}(t)\right) \cdot \left(a e^{ta} \hat{\gamma}(t) + e^{ta} \hat{\gamma}'(t)\right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} a e^{ta} \cdot e^{ta} \|\hat{\gamma}(t)\|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} a e^{2ta}\, dt = \frac{1}{2}\left(e^{2t_2 a} - e^{2t_1 a}\right)$$

NOTA: AVREI POTUTO RAGIONARE COSÌ:

$$(*) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\gamma(t)\|^2 \, dt = \left[\frac{1}{2} \|\gamma(t)\|^2 \right]_{t=t_1}^{t=t_2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\|\gamma(t_2)\|^2 - \|\gamma(t_1)\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(e^{2at_2} - e^{2at_1} \right)$$

IN QUESTO SECONDO RAGIONAMENTO NON HO USATO LA FORMA DELLA CURVA MA SOLO LE PROPRIETÀ ("γ è CONSERVATIVO")

APPROCCIO ALTERNATIVO

MI PIACEREBBE DEFINIRE LE CURVE COME SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^N$

POTREI FARE COSÌ: (NUOVA DEF.)

Def. Dico che $C \subset \mathbb{R}^N$ è una "curva" ($C^0/C^1/\dots C^k$) se esiste una funzione $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^N$ tale che γ è continua $/C^1/\dots C^k$ tale che

- γ è iniettiva
- $\gamma([a,b]) = C$

$\gamma: [a,b] \to C$ è bigettiva

(γ la chiamo "parametrizzazione" di C)

Nel caso $C^1 \to \dot\gamma(t) \neq 0 \ \forall t$

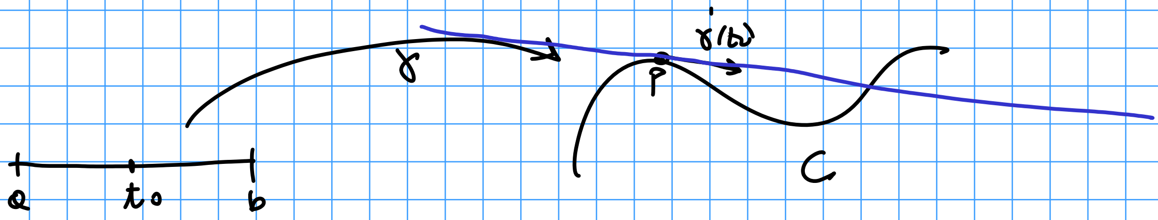
Se C è C^1 (cioè se trovo una parametrizzazione C^1, con $\dot\gamma \neq 0$)

Allora posso definire la retta tangente in ogni punto $P \in C$

In fatti: scelgo una $\gamma: [a,b] \to C$ come DETTO SOPRA,

Trovo $t_0 \in [a,b]$: $\gamma(t_0) = P$, considero la retta

$$r(s) = P_0 + s\vec{v} \quad \text{dove } \vec{v} = \dot\gamma(t_0) \neq 0$$

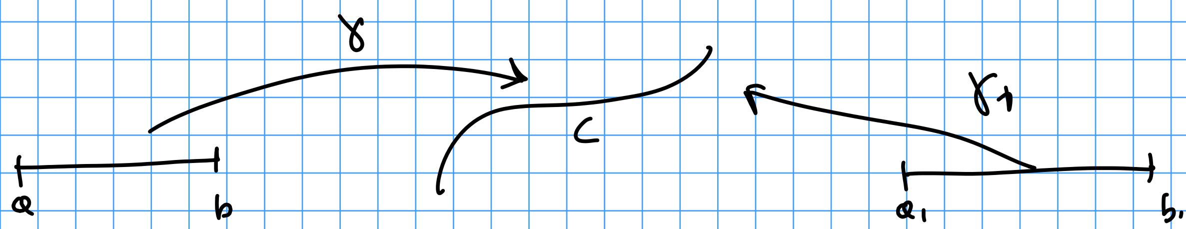


Se γ_1 è un'altra parametrizzazione $\gamma_1: [a_1, b_1] \to C$,

c'è $t_1 \in [a_1, b_1]$ t.c. $\gamma_1(t_1) = P_0$

MA $\dot\gamma_1(t_1) = \lambda \dot\gamma(t_0)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$ (CONSEGUENZA DELLE PROPRIETÀ DEI CAMBI DI PARAMETRO)

SI PUÒ DIM CHE γ_1 è una riparametrizzata di γ



$$\Rightarrow \exists\ \varphi : [a_1, b_1] \to [a, b] \text{ t.c. } \gamma_1 = \gamma \circ \varphi$$

· ATTENZIONE Con questa def. NON HA SENSO IL VETTORE TANGENTE MA SOLO LA RETTA TANGENTE

· POSSO ANCHE DEFINIRE $\int_C f \cdot ds$

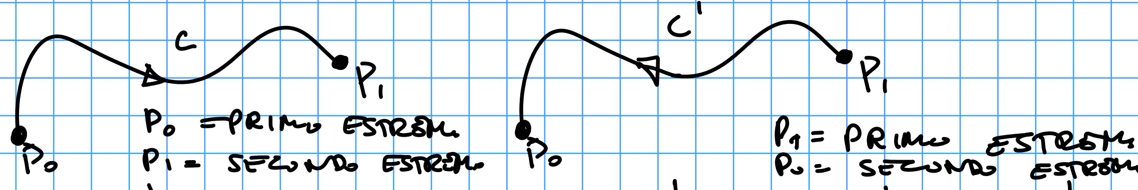
sempre prendendo una parametrizzazione γ per C

e definendo $\int_C f\, ds = \int_\gamma f\, ds$

Di nuovo questa def. non dipende dalla parametrizzazione

· Posso anche "aggiungere il verso" su questi C:

Dato che $C = \gamma[a,b] \Rightarrow$ posso definire gli "ESTREMI" di C, che sono $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$



· Se cambio parametrizzazione, comunque ritrovo gli stessi punti

· CHIAMO "CURVA ORIENTATA" UNA CURVA C in CUI DECIDO CHI È IL PRIMO ESTREMO E IL SECONDO ESTREMO

· Se C è una curva orientata posso definire

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove $\gamma : [a,b] \to C$ è una parametrizzazione t.c. $\gamma(a)$ = primo estremo $\gamma(b)$ = secondo estremo

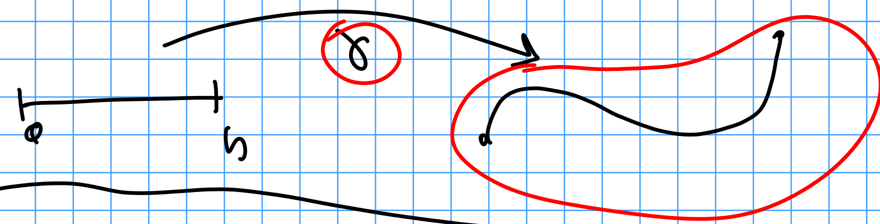
Def. Dico che C è una curva chiusa ($C \subset \mathbb{R}^N$)

se $\exists\ \gamma : [0,b] \to C$: γ è iniettiva su $[0,b[$

$\gamma([0,b]) = C$ $\qquad \gamma(0) = \gamma(b)$

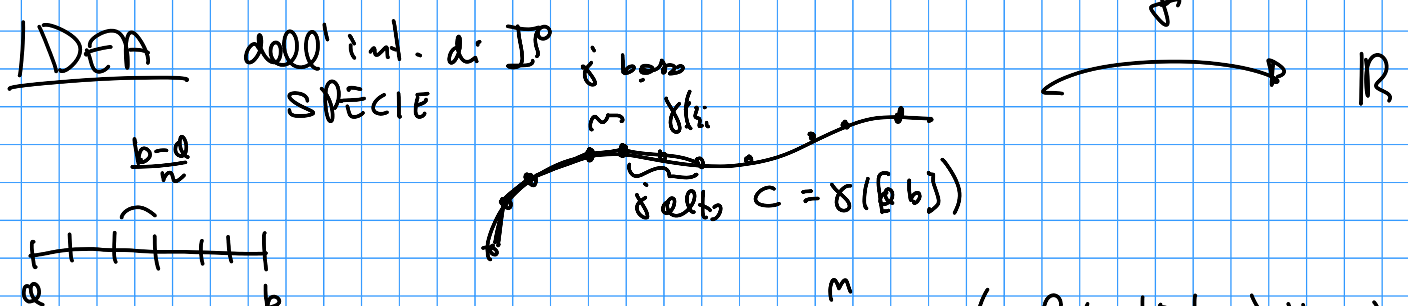
$\dot\gamma \neq 0$

qui non ci sono gli estremi



PAUSA FINO ALLE 12.30

IDEA dell'int. di I° SPECIE



$$\int_\gamma f\, ds \simeq \sum_{i=1}^{n} \left(f(\gamma(\xi_i)) \right) \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

$t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$

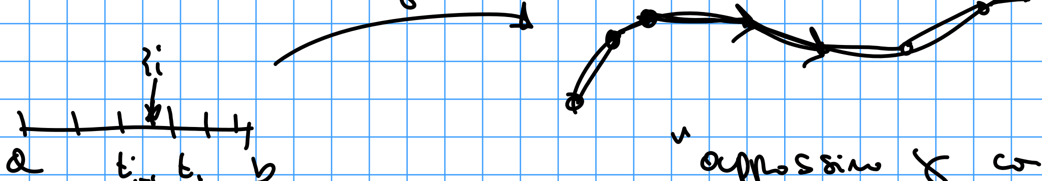
(e faccio tendere $n \to \infty$)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\xi_i)) \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1})}_{\frac{\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx \dot\gamma(t_i)}$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

DI II° specie



"approssimo γ con la spezzata"

considero $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \vec{f}(\gamma(\xi_i))\cdot\left(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\right) =$

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{f}(\gamma(\xi_i))\cdot\left(\frac{\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right)(t_i-t_{i-1})$$

(se $m \to \infty$)

$$\int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt$$

CALCOLO DIFFERENZIALE

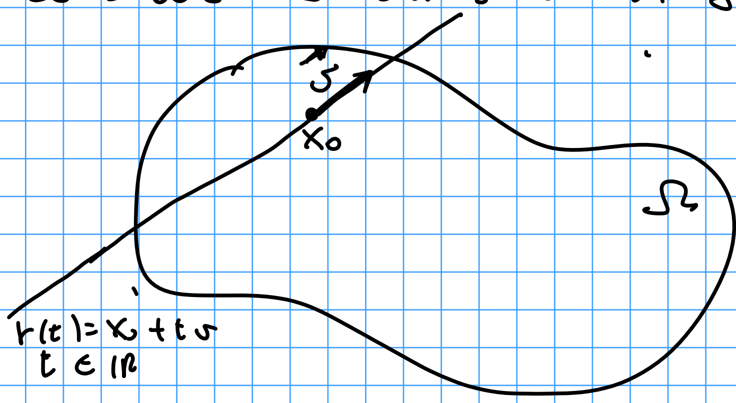
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\qquad f:\Omega \to \mathbb{R}^M$ (penso a $M=1$ come caso più significativo)

$x_0 \in \Omega$

Def. (derivata direzionale) Dato un vettore $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^N$ considero la restrizione di f alla retta $x_0 + t\vec{v} = r(t)$

se $t=0$ $\quad r(0)=x_0$

$r'(0)=\vec{v}$



quindi considero $\quad g(t)=f(x_0+t\vec{v})$

Se questa funzione g è derivabile in $t=0$

cioè se esiste $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h\vec{v})-f(x_0+0\vec{v})}{h-0}$

$(h=t)\qquad \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t} =: f'(x_0)(\vec{v})$ ⊗

DICO CHE f è derivabile in x_0 lungo la direzione $\vec{v}$

e scrivo ⊗ $\quad f'(x_0)(\vec{v})$ si dice "DERIVATA DIREZIONALE" di f, in x_0, lungo $\vec{v}$ (nella direzione di $\vec{v}$)

OSS. • $f'(x_0)(0) = 0$ (qualunque sia f)

• Se $\exists\, f'(x_0)(\vec{v}) \Rightarrow \exists\, f'(x_0)(\lambda \vec{v})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

e vale $f'(x_0)(\lambda \vec{v}) = \lambda f'(x_0)(\vec{v})$.

INFATTI $f'(x_0)(\lambda v)$ $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda \vec{v}) - f(x_0)}{t} = \circledast$ ($= 0$ se $\lambda = 0$, $\frac{0}{t} = 0$)

se $\lambda \neq 0$ faccio un cambio di variabile $s = \lambda t$

$$\circledast = \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda \vec{v}) - f(x_0)}{\lambda t} =$$

$$\lambda \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\vec{v}) - f(x_0)}{s} = \lambda f'(x_0)(\vec{v})$$

QUESTO $f'(x_0)(\vec{v})$ basterebbe conoscerlo sui $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$

DOMANDA $f'(x_0)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f'(x_0)(\vec{v}_1) + f'(x_0)(\vec{v}_2)$

??

per porci la domanda dobbiamo sapere che $f'(v_1)$ e $f'(v_2)$ esistano

IN GENERALE $\boxed{\text{NO}}$

CONTROESEMPIO

VALE ZERO SUGLI ASSI

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) := 0$$

Sia $\vec{v} = (v_x, v_y)$. VEDIAMO CHE

$$f'(0,0)(\vec{v}) \begin{cases} = 0 & \text{se } \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ o } \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \text{NON ESISTE} & \text{NEGLI ALTRI CASI} \end{cases}$$

Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f(x_0 + t\vec{v}) = f(0 + t\cdot 1, 0 + t\cdot 0)$

$x_0 = (0, 0)$

$= f(t, 0) = 0$

$\Rightarrow$ la sua derivata è zero

$$\left(\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \right)$$

STESSO DISCORSO SE $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

TROVO $\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim \frac{0-0}{t} = 0$

Se chiamo $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f'(0)(\hat{e}_1) = f'(0)(\hat{e}_2) = 0$$

Se invece $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ devo calcolare

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - f(0,0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cancel{t} v_x \cancel{t} v_y}{\cancel{t^2} v_x^2 + t^2 v_y^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } v_x v_y > 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 / v_y = 0 \\ -\infty & \text{se } v_x v_y < 0 \end{cases}$$

LA DERIVATA DIREZIONALE DI f ESISTE

SOLO nelle direzioni $\hat{e}_1$ ed $\hat{e}_2$

$\nexists\ f'(0)(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$ anche se $\exists\ f'(0)(\hat{e}_1)$ e $f'(0)(\hat{e}_2)$

LA FORMULA IN REALTÀ È FALSA (può essere falsa)

ANCHE SE IPOTIZZO CHE $\exists\ f'(x_0)(\vec{v})\ \forall \vec{v}$

ALTRO CONTROESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \underline{\underline{f(0,0)=0}}$$

<u>NOTA</u> che f è CONTINUA IN $(0,0)$ infatti

$$|f(x,y)| \le |y| \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2} \le |y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 \quad \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\right)$$

Vediamo se $\exists$ $f'(0,0)(v_x,v_y) =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(v_x,v_y))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cancel{t}} \frac{\cancel{t}v_x \cancel{t^2}v_y^2}{\cancel{t^2}v_x^2+\cancel{t^2}v_y^2} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2} = \frac{v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2} \qquad \underline{\underline{\text{ESISTONO}}}$$

$$f'(0,0)(v_x,v_y) = \frac{v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2}$$

NON È LINEARE RISPETTO A $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$$f'(0,0)(1,0) = 0$$
$$f'(0,0)(0,1) = 0$$

MA $f'(0,0)(1,1) = \frac{1}{2} \ne 0+0$

<u>ULTERIORE CONTROESEMPIO</u>

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad f(0,0)=0$$

VEDIAMO SE $\exists$ $f'(0,0)(v_x,v_y) =$ $\quad (v_x,v_y) \ne (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t v_x t^2 v_y^2}{t^2 v_x^2 + t^4 v_y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{v_x v_y^2}{\underbrace{v_x^2 + t^2 v_y^4}_{=0\ \forall t \text{ se } v_x=0}} = \begin{cases} \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \ne 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 \end{cases}$$

LE DERIVATE DIR. $\underline{\underline{\text{ESISTONO}}}$ $\forall \vec{v}$
(non sono lineari..)

PERÒ f $\boxed{\text{NON È CONTINUA}}$ (si era visto.

prendendo $x = y^2 \longrightarrow f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \not\to 0$)

L'ESISTENZA DELLE DERIVATE DIREZIONALI NON IMPLICA LA CONTINUITÀ DI f

CONTINUAMO LA PROSSIMA SETTIMANA