Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 14 27/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

IERI Nell'integrale $\int_{-e}^{e} \sqrt{1+4x^2}\,dx$ (primo modo) c'era un errore

ORA CORRETTO NEL P.D.F.

Stavamo considerando la curva $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ su $[0,1]$. Se $t \in [0,1]$ considero

$$\ell(t) = \int_0^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau = \frac{(4+9t^2)^{3/2} - 8}{27} \quad \text{(fatto ieri)}$$

lunghezza del tratto di curva tra 0 e t.

$$\ell(\gamma) = \ell(1) = \frac{13^{3/2} - 8}{27} = L$$

Vediamo in questo esempio la riparametrizzazione di γ "in lunghezza d'arco". Devo trovare $\varphi(s) = \ell^{-1}(s)$ da $[0,L] \to [0,1]$. Dunque dato s cerco t con

$$\frac{(4+9t^2)^{3/2} - 8}{27} = s \iff (4+9t^2)^{3/2} = 8+27s$$

$$t^2 = \frac{(8+27s)^{2/3} - 4}{9} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\sqrt{(8+27s)^{2/3}-4}}{3} =: \varphi(s) \qquad \left(\varphi(0)=0,\ \varphi(L)=1 \right)$$

Introduco $\quad \gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) = \left(\varphi(s)^2, \varphi(s)^3 \right) =$

$$\gamma_1(s) = \left(\frac{(8+27s)^{2/3}-4}{9}, \frac{\left((8+27s)^{2/3}-4\right)^{3/2}}{27} \right)$$

vediamo quanto fa $\dot{\gamma}_1(s)$ e $\|\dot{\gamma}_1(s)\|$

$$\dot{\gamma}_1(s) = 27\left(\frac{\frac{2}{3}(8+27s)^{-\frac{1}{3}}}{9}, \frac{\cancel{\frac{3}{2}}\left((8+27s)^{2/3}-4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cancel{\frac{2}{3}}(8+27s)^{-\frac{1}{3}}\right)}{27} \right)$$

$$= \cancel{27}\left(\frac{1}{\cancel{27}}(8+27s)^{-1/3}\right)\left(2, \left((8+27s)^{2/3}-4\right)^{1/2}\right)$$

$$\|\dot{\gamma}_1(s)\|^2 = (8+27s)^{-2/3}\left(\cancel{4} + (8+27s)^{2/3} - \cancel{4}\right) = 1$$

Effettivamente γ_1 è parametrizzata in lunghezza d'arco:

$$\ell\left(\gamma_1|_{[0,s]}\right) = s$$

In realtà c'è una definizione più generale di lunghezza di una curva.

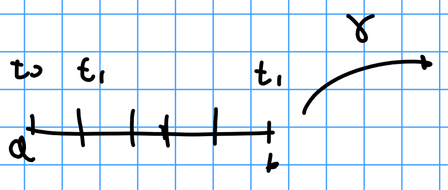
Def. Data $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ (γ può anche non essere continua)

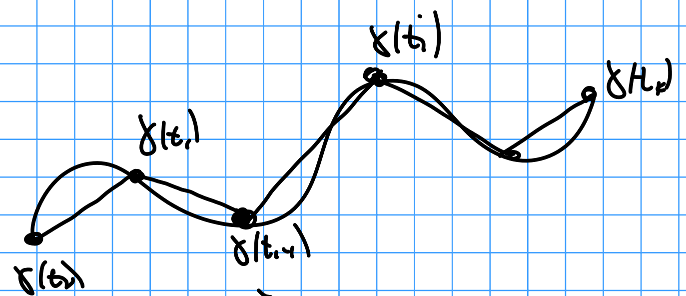
Considero una suddivisione σ dell'intervallo $[a,b]$ e cioè

$$\sigma = \{ t_0 < t_1 < \dots < t_k \} \quad \text{con} \quad t_0 = a \quad t_k = b$$

Data una tale σ considero

$$\ell_\sigma = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$





Definisco infine la lunghezza "geometrica" di γ:

$$\ell_G(\gamma) = \sup\{\ell_\sigma : \sigma \text{ è una suddivisione di } [a,b]\}$$

(può essere $+\infty$)

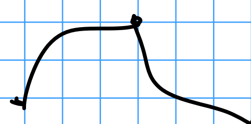
Dico che γ è RETTIFICABILE se $\ell_G(\gamma) < +\infty$

SI POSSONO DIMOSTRARE:

- ℓ_G non cambia se riparametrizzo γ
- ℓ_G è additivo rispetto all'incollamento di curve:

  se γ_1 e γ_2 sono consecutive $\Rightarrow$

$$\ell_G(\gamma_1 \vee \gamma_2) = \ell_G(\gamma_1) + \ell_G(\gamma_2)$$



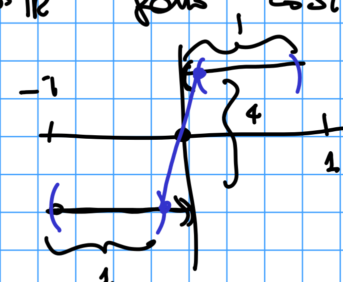
- NON È DETTO che

(a) γ continua $\Rightarrow$ γ rettificabile

(b) γ rettificabile $\Rightarrow$ γ continua

(b) non è vero: Posso prendere $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ fatta così:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1,t) & \text{se } t \in]0,1] \\ (0,0) & \text{se } t = 0 \\ (-1,t) & \text{se } t \in [-1,0[\end{cases}$$

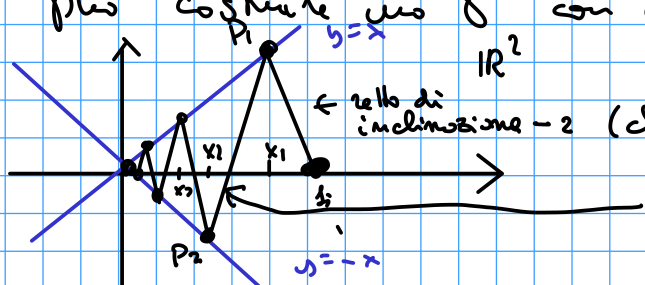


γ è il grafico di $g(x) = \mathrm{sgn}(x)$ da -1 e 1

Si può vedere che γ ha lunghezza pari a $\boxed{4}$

(b) non è vero (ci sono curve continue con lunghezza$_G$ $= +\infty$)

Si può costruire una γ con queste proprietà nel modo che segue:



← retta di inclinazione -2 (che passa per $(1,0) = P_0$)

retta di inclinazione $m=2$ che passa per P_1

CONTINUANDO COSÌ TROVO UNA SUCC. DI PUNTI
$P_n = (x_n, y_n)$ tali che $P_0 = (1, 0)$ e x $n \geq 1$

P_{2n} appartengono alla diagonale $y = -x$
P_{2n-1} appartengono alla diagonale $y = x$ e

$$x_n \to 0 \qquad |y_n - y_{n-1}| = 2 x_n - x_{n-1}$$

Si vede che posso costruire una curva $\gamma :]0,1] \to \mathbb{R}^2$
che sia grafico dei segmenti disegnati sopra

- Se $\gamma(t) = tP + (1-t)Q \Rightarrow \ell(\gamma) = \|P - Q\|$

e posso anche definire $\gamma(0) = 0 \Rightarrow \gamma$ è continua

$$|\gamma(x)| \leq x \Rightarrow \gamma \text{ è continua}$$

Però facendo i calcoli si scopre che

$$\ell(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{spezzate} = \text{serie divergente}$$

$$\left(|y_n - y_{n-1}| \simeq \frac{c}{n} \Rightarrow \|P_n - P_{n-1}\| = \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} \leq |y_n - y_{n-1}| \simeq \frac{c}{n} \right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

TEOREMA Se γ è di classe $C^1[a,b]$, γ bigettiva

$$\Rightarrow \quad \ell_G(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

CIOÈ LA LUNGHEZZA "GEOMETRICA" COINCIDE CON QUELLA
Definita mediante l'integrale (se $\dot{\gamma}$ esiste!!)
Posso scrivere $\ell(\gamma)$ invece di $\ell_G(\gamma)$

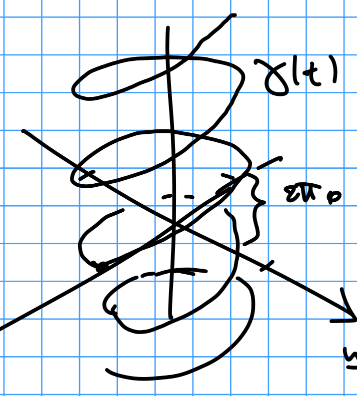
OSS. Si potrebbe estendere il teorema sopra a un $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ continua su $[a,b]$ e $C^1(]a,b[)$ biiettiva

$\Rightarrow \quad \ell_G(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt$ (può anche essere $+\infty$)

(si può ragionare calcolando $\ell_G\left(\gamma\big|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \ell_G(\gamma)$)

Altri esempi:

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$



ELICA $\quad \gamma(t) = (\underbrace{R\cos(t), R\sin(t)}_{\text{descrive una circonferenza}}, \underbrace{at}_{\text{sale linearmente}})$

Nota se $t = 2\pi$

$$\gamma(2\pi) = \gamma(0) + (0, 0, 2\pi a) \qquad 2\pi a = \text{"passo" dell'elica}$$

$\gamma(t)$ è regolare: $\quad \dot\gamma(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), a)$

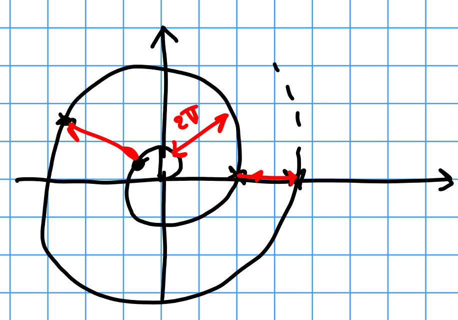
$\|\dot\gamma\|^2 = R^2 + a^2 > 0$

lunghezza tra 0 e T $= \int_0^T \|\dot\gamma(t)\| dt = \int_0^T \sqrt{R^2+a^2}\, dt =$

$T\sqrt{R^2+a^2}$

ALTRO ESEMPIO (SPIRALE ARCHIMEDEA) $\quad \gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t)) = t(\sin(t), \cos(t))$$



- Noto che $\gamma(t+2\pi) - \gamma(t)$

$$= (t + 2\pi - t)(\cos(t), \sin(t)) = 2\pi(\cos(t), \sin(t))$$

$\|\gamma(t+2\pi) - \gamma(t)\|^2 = 4\pi^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = 1 \Rightarrow \|\gamma(t+2\pi) - \gamma(t)\| = 2\pi$

(potrei anche considerare $\gamma(t) = at(\cos(t), \sin(t))$ ....)

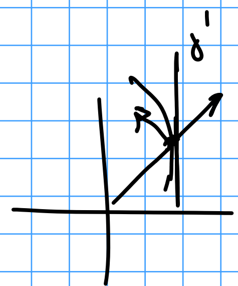
- γ è C^1

$$\dot\gamma(t) = \underbrace{(\cos(t), \sin(t))}_{} + t\,\underbrace{(-\sin(t), \cos(t))}_{} = \hat\gamma(t) + t\,\hat\gamma'(t)$$

ORTOGONALI

$$\|\hat\gamma(t) + t\hat\gamma'(t)\|^2 = \underbrace{\|\hat\gamma(t)\|^2}_{=1} + t^2\,\underbrace{\|\hat\gamma'(t)\|^2}_{=1}$$

$$\boxed{\|\dot\gamma(t)\|^2 = 1 + t^2}$$



FARE IL CALCOLO

- $\ell(\gamma)$. tra 0 e T è pari a $\int_0^T \sqrt{1+t^2}\,dt$

$\left(= \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(T) + \frac{1}{2} T\sqrt{1+T^2} \quad \text{A MEMORIA} \right)$