Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 13 26/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

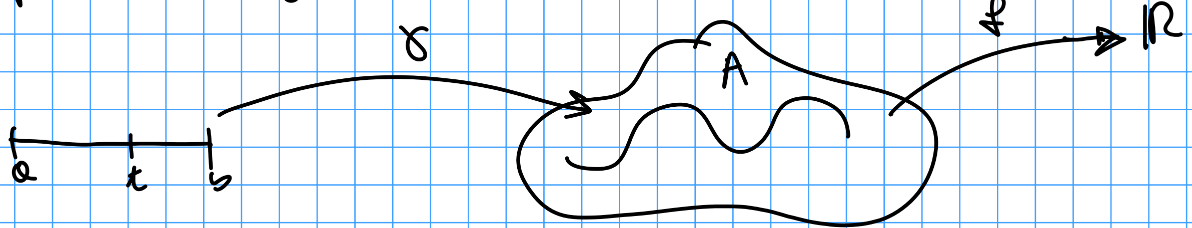
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

<u>CURVE</u> $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$

γ di classe C^1 se $\exists\ \dot{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^N$

<u>Def.</u> Supponiamo γ curva C^1 da $[a,b] \to A \subset \mathbb{R}^N$

supponiamo $f : A \to \mathbb{R}$ sia continua



Chiamo "integrale curvilineo di I^a specie" di f su γ

$$\boxed{\int_\gamma f\, ds \underset{(def)}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt}$$

(caso $f \equiv 1$) chiamo "lunghezza di γ" l'integrale:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

<u>Proposizione</u> Se γ_1 è una riparametrizzata di γ

$(\Rightarrow \gamma_1([a,b]) = \gamma([a,b]))$ allora

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{\gamma} f \, ds$$

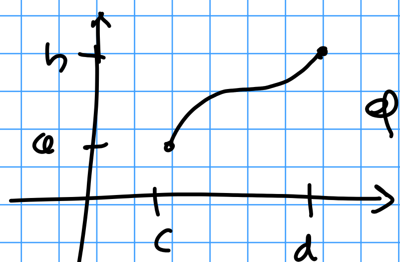
L'integrale non cambia se faccio un cambio di parametro

Dim. Per ipotesi so che $\exists \ \varphi : [c,d] \to [a,b]$

$\varphi \ C^1$, φ bigettiva tale $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \ \forall s \in [c,d]$
(φ è il "cambio di parametro")

φ bigettiva $\Rightarrow$ φ strettamente monotona $\Rightarrow$ $\varphi' \geq 0$ se φ CRESC.
$\cancel{\Leftarrow}$ $\varphi' \leq 0$ se φ DECR.

CASO $\varphi' \geq 0 \iff \varphi(c) = a \quad \varphi(d) = b$



Applicando la def di int. curvilineo

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_c^d f(\gamma_1(s)) \, \| \dot{\gamma}_1(s) \| \, ds =$$

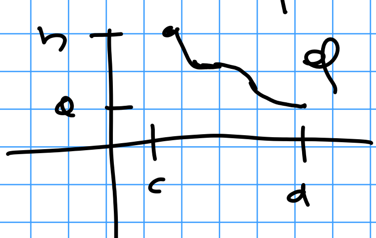
$\left(\text{ma } \gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \Rightarrow \dot{\gamma}_1(s) = \dot{\gamma}(\varphi(s)) \, \dot{\varphi}(s) \right)$

$$= \int_c^d f(\gamma(\varphi(s))) \, \| \underbrace{\dot{\varphi}(s)}_{\geq 0} \, \dot{\gamma}(\varphi(s)) \| \, ds =$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\varphi(s))) \, \| \dot{\gamma}(\varphi(s)) \| \, \underbrace{\varphi'(s) \, ds}_{dt} = \text{(cambio di variabile } t = \varphi(s))$$

$$= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(t)) \, \| \dot{\gamma}(t) \| \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \| \dot{\gamma}(t) \| \, dt = \int_\gamma f \, ds$$

CASO φ decrescente $\Rightarrow \varphi' \leq 0 \iff \varphi(c) = d, \ \varphi(d) = a$



Di nuovo

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_c^d f(\gamma(\varphi(s))) \, \| \underbrace{\dot{\varphi}(s)}_{\leq 0} \, \dot{\gamma}(\varphi(s)) \| \, ds =$$

$$- \int_c^d f(\gamma(\varphi(s))) \, \|\dot\gamma(\varphi(s))\| \, \dot\varphi(s) \, ds \qquad (t = \varphi(s))$$

$$= - \int_{\varphi(c) = b}^{\varphi(d) = a} f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\| \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\| \, dt = \int_\gamma f \, ds$$

TORNA IN ENTRAMBI I CASI

(sia che il cambio di paramet. MANTENGA IL VERSO sia che LO INVERTA)

L'INTEGRALE DI PRIMA SPECIE NON CAMBIA SE CAMBIO IL VERSO

<u>ESEMPIO</u> 1 (CIRCONFERENZA) Dato $R > 0$ considero

$$\gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t)) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

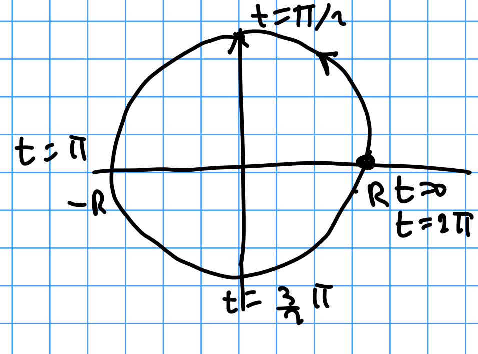
Nb $\|\gamma(t)\|^2 = R^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 1$

$\Rightarrow \gamma(t) \subset S(0,R) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \|P\| = R\}$

IN REALTÀ $\boxed{\gamma([0, 2\pi]) = S(0,R)}$

(è legato alla proprietà delle funzioni trigonometriche: se $(x,y) \in S(0,1) \Rightarrow \exists\, \theta : \cos\theta = x \;\; \sin\theta = y$)

- Se $\theta_1 \neq \theta_2 \in [0, 2\pi[\;\Rightarrow \gamma(\theta_1) \neq \gamma(\theta_2)$
- γ è una curva chiusa (se mi metto su $[0, 2\pi]$) $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$)



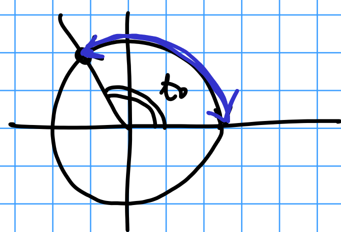
Fissiamo $t_0 > 0$. Calcoliamo la lunghezza di $\gamma : [0, t_0] \to \mathbb{R}^2$ (γ definita come sopra)

$$\ell(\gamma) = \int_0^{t} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = R\int_0^{t_0} = t_0 R \leftarrow \oplus$$

$$\dot\gamma(t) = R(-\cos(t), \sin(t)) \qquad \|\dot\gamma\|^2 = R^2\left((-\cos(t))^2 + \sin^2(t)\right)$$

$$= R^2 \Rightarrow \|\dot\gamma(t)\| = R$$

Se $R = 1$ t_0 misura la lunghezza dell'arco su $S(0,1)$



OSS. Notiamo che se: $\|\gamma(t)\| = $ costante

(nell'esempio sopra) $\Rightarrow \frac{d}{dt}\|\gamma(t)\| = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\gamma(t)\cdot\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow 2\dot\gamma(t)\cdot\gamma(t) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\cdot\gamma_1(t) = \dot\gamma(t)\cdot\gamma_1(t) + \gamma(t)\cdot\dot\gamma_1(t)\right)$$

Se $\|\gamma(t)\| = $ cost. $\Rightarrow$ γ e $\dot\gamma$ sono sempre perpendicolari

Def. Dico che γ è C^1 a tratti su $[a,b]$ $\left(C^1(a,b)\right)$

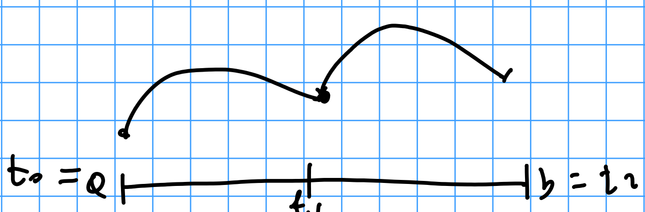
se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è continua ed

$\exists$ $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ ($t_0 = a$, $t_k = b$) tali che

γ è C^1 su ognuno degli $[t_{i-1}, t_i]$ $i = 1 \dots k$

(in questa def. deve esistere la derivata sinistra in t_i e la derivata destra in t_{i-1})

(regolare a tratti se in ognuno degli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ la $\dot\gamma(t) \neq 0$)



Def. (integrale per funzioni C^1 a tratti)

Se γ è come nella def. sopra, $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{R}^N$

$f : A \to \mathbb{R}$ continua, allora definisco

$$\int_\gamma f \, ds = \sum_{i=1}^{K} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\| \, dt$$

Si può dimostrare che $\int_\gamma f \, ds$ non dipende dal modo in cui suddivido $[a,b]$ come detto sopra: ∄ Dim.

Fatto Se $\gamma : [a,b] \to A$, $f : A \to \mathbb{R}$ continua, di classe C^1 e se $c \in [a,b]$ posso considerare

$$\gamma_1 : [a,c] \to A \qquad \gamma_1(t) = \gamma(t)$$
$$\gamma_2 : [c,b] \to A \qquad \gamma_2(t) = \gamma(t)$$

Allora $$\int_\gamma f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds$$

Def. Siano $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^N$

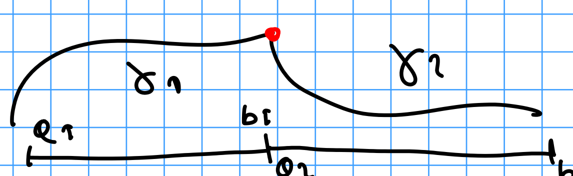
$\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^N$

Dico che γ_1 e γ_2 sono "consecutive" se

$(b_1 = a_2)$ $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$

Chiamo $\gamma := \gamma_1 \vee \gamma_2$ (l'incollamento di γ_1 e γ_2)

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [\overset{(=)!!}{a_2}, b_2] \end{cases}$$



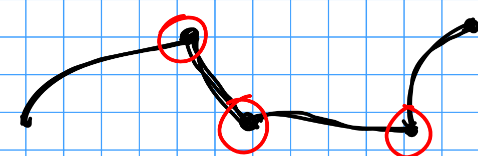
È chiaro che, se γ_1, γ_2 sono C^1 $\Rightarrow$
$\gamma_1 \vee \gamma_2$ è C^1 a ~~tratti~~

Anzi posso dire che:

γ è C^1 a tratti $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\gamma_1 \dots \gamma_k$ consecutive tali che $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_k$

È chiaro anche che (per definizione)

$$\int_{\gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k} f \, ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f \, ds$$



PIÙ IN GENERALE posso convenire che γ_1 e γ_2 sono consecutive se $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$

senza chiedere $a_2 = b_1$ IN QUESTO CASO

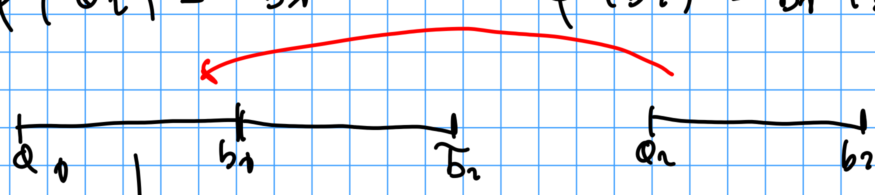
posso definire $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$
riparametrizzando le due curve in modo che i due intervalli "di base" siano consecutivi.
(abbiamo visto che gli integrali non cambiano)

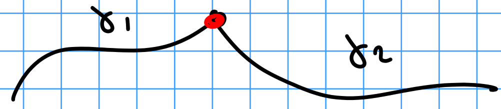
Per esempio $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^N$
$\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^N$

posso considerare una trasformazione AFFINE:

$$\varphi(t) = b_1 + (t - a_2)$$

$$\varphi(a_2) = b_1 \qquad \varphi(b_2) = b_1 + b_2 - a_2 = \tilde{b}_2$$





$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 : [a_1, \tilde{b}_2] \to \mathbb{R}^N$$

NON MI PREOCCUPO DEGLI INTERVALLI IN CUI VARIA t

– posso sempre cambiare parametrizzazione senza cambiare gli integrali

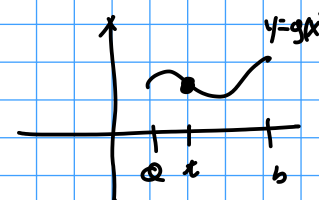
PAUSA FINO ALLE 16.20

<u>ESEMPIO</u> (GRAFICI DI FUNZIONI REALI $\to$ <u>CURVE CARTESIANE</u> IN $\mathbb{R}^2$)

Supponiamo che $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ g sia C^1

Posso considerare la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ def. da

$$\gamma(t) = (t, g(t))$$



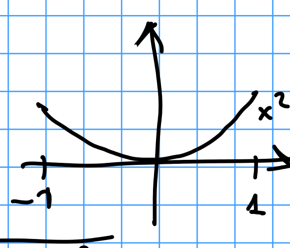
Il sostegno di γ è il GRAFICO di g

Si vede facilmente che $\dot\gamma(t) = (1, g'(t)) \Rightarrow \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1 + g'(t)^2}$

$\Rightarrow$ (per esempio) $\quad \ell(\gamma) =$ "ℓ(grafico di g)" $=$

$$\int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2}\, dt$$

<u>Per esempio</u>: $\quad g(x) = x^2 \quad$ su $[-1, 1]$



$$\ell = \ell(\text{arco di parabola}) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

(1) sostituzione $\quad 2x = \sinh(t) \Rightarrow 2\, dx = \cosh(t)\, dt$

arcsinh(2) ← qui c'era un errore

$$\ell = \frac{1}{2} \int_{-\text{arcsinh}(1)}^{\text{arcsinh}(2)} \sqrt{1 + \sinh^2(t)}\, \cosh(t)\, dt = \frac{2}{2} \int_0^{\text{arcsinh}(2)} \cosh^2(t)\, dt =$$

$$\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2t)}{2}\right) dt =$$

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$$
$$\left(\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1\right)$$
$$2\cosh^2(t) - 1$$
$$\cosh^2(t) = \frac{1+\cosh(2t)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2) + \frac{1}{4}\sinh(2t)\Big|_0^{\operatorname{arcsinh}(2)}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2) + \frac{1}{2}\sinh(t)\cosh(t)\Big|_{t=\operatorname{arcsinh}(2)} =$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2) + \frac{1}{2}\,2\sqrt{1+2^2}\Big) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2) + \sqrt{5}$$

PIÙ IN GENERALE SE considero $g(x) = x^2$ su $[-a, 0]$

TROVO $\underbrace{\ell(\text{arco di parabola})}_{\text{tra } -a \text{ e } a}{}_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2a) + a\sqrt{1+4a^2}$

Per esercizio vediamo un altro modo di fare l'integrale

(2)
$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx =$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} + \int_{-a}^{a} x\,\frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \text{(per parti il secondo int.)}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+4x^2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}x}{\cancel{2}\sqrt{1+4x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arcsinh} 2x\Big]_{-a}^{a} + \Big[x\sqrt{1+4x^2}\Big]_{-a}^{a} - \underbrace{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+4x^2}\,dx}_{\text{LO RIBUTTO A SINISTRA DELL'} =}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} 2x = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$2\int_{-a}^{b}\sqrt{1+4x^2}\,dx = \operatorname{arcsinh}(2a) + 2a\sqrt{1+4a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-a}^{b}\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2a) + a\sqrt{1+4a^2}$$

IN UNO DEI DUE INTEGRALI C'E' UN ERRORE

<u>FATTO</u> Supponiamo che $\gamma:[0,b]\to\mathbb{R}^N$ sia C^1 e

$\dot\gamma(t)\neq 0 \quad \forall t\in\,]a,b[$ (può essere $\dot\gamma(a)=0$ / $\dot\gamma(b)=0$)

Definiamo $\ell(t):=\int_a^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau$ $\quad (t\in[0,b])$

(= lunghezza del tratto di curva tra a e t)

$\ell'(t)=\|\dot\gamma(t)\|\geq 0 \quad \forall t\in[0,b]$

$\ell(a)=0 \quad \ell(b)=L$ = lunghezza di γ su $[0,b]$

ℓ è continua ed è bigettiva da $[0,b]\to[0,L]$

$\Rightarrow \exists\, \varphi=\ell^{-1}:[0,L]\to[a,b]$ e vale (Analisi I)

$\forall s\in\,]0,L[\qquad \varphi'(s)=\dfrac{1}{\ell'(\varphi(s))}=\dfrac{1}{\|\dot\gamma(\varphi(s))\|}$

Se definisco $\gamma_1(s)=\gamma(\varphi(s))$ (RIPARAMETRIZZO USANDO φ)

$\Rightarrow$ γ_1 è C^1 su $]0,L[$ e vale

$$\dot\gamma_1(s)=\dot\gamma(\varphi(s))\,\dot\varphi(s)=\frac{\dot\gamma(\varphi(s))}{\|\dot\gamma(\varphi(s))\|}$$

$\Rightarrow \quad \forall s\in\,]0,L[\quad \|\dot\gamma_1\|=1$

se ne deduce (lo rivediamo anche domani)

(TUTTO TORNA SE $\dot\gamma(t)\neq 0$ anche in a e in b)

$\gamma_1:[0,L]\to[a,b]$ è una riparametrizzazione di γ con la proprietà

$$\ell\left(\gamma_1|_{[0,s]}\right)=s$$

s è la lunghezza d'arco di γ_1 tra 0 ed S

<u>DUNQUE</u> Se $\dot\gamma(t)\neq 0$ in $]0,b[$ posso riparametrizzare

γ "in lunghezza d'arco"

Se per esempio prendo $\gamma(t) = (t^2, t^3)$

su $[0,1]$ (o $[-1,0]$) posso fare questi calcoli:

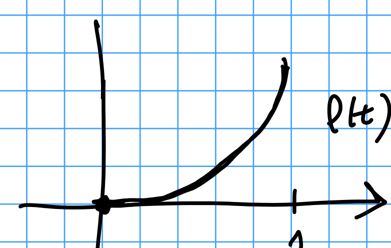
$\dot\gamma(t) = 2t,\ 3t^2$ $\qquad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} =$

$t\sqrt{\quad 9 \quad {}^2}$

$$\ell(t) = \int_0^t \tau\sqrt{4 + 9\tau^2}\, d\tau = \qquad \sigma = 4 + 9\tau^2 \quad d\sigma = 18\tau\, d\tau$$

$$= \frac{1}{18}\int_4^{4+9t^2} \sqrt{\sigma}\, d\sigma = \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3}\sqrt{\sigma^3}\right]_4^{4+9t^2} = \frac{1}{27}\left((4+9t^2) - 8\right)$$

$$\ell(t) = \frac{1}{27}\left((4 + 9t^2)^{3/2} - 8\right)$$



$$\ell(1) = \underbrace{\frac{1}{27}\left(13^{3/2} - 8\right)}_{L} = \underline{\text{lunghezza}} \text{ di } \gamma \text{ da } 0 \text{ a } 1$$

VORREI TROVARE $\varphi = \ell^{-1} : [0, L] \to [0, 1]$

e verificare che $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$ è una curva regolare con $\|\dot\gamma_1(s)\| = 1$ in $[0, L]$