Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 12   21/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Ulteriore generalizzazione di Weierstrass

$f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$ f continua . A aperto

Supponiamo che valgano:

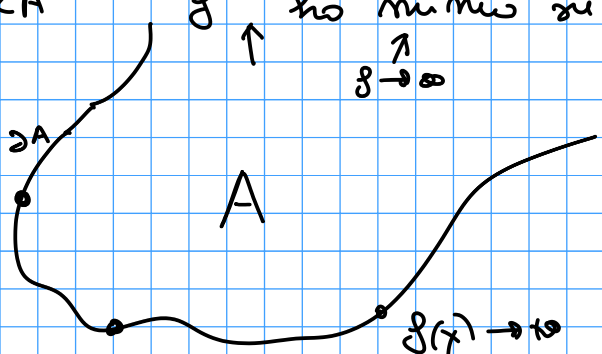
(1) $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty \; (-\infty)$ (se A è illimitato — se no non c'è ipotesi)

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \; (-\infty)$.   (se $\partial A \neq \emptyset$. Se $\partial A = \emptyset$ non c'è questa ipotesi
se $A = \mathbb{R}^N \Rightarrow \partial A = \emptyset$)

per ogni $x_0 \in \partial A$

ALLORA f ha minimo su A (f ha massimo su A)

$f \to \infty$



Idea di dim. (sempre imitando la dim. di Weierstrass!

Si prende una successione di punti (x_n) in A tali che

$$f(x_n) \to \inf_A f$$

- Dico che $\boxed{(x_n) \text{ è limitata}}$: se non lo fosse potrei supporre $\|x_n\| \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$ (per la ipotesi (1)) CONTRADDICE $f(x_n) \to \inf_A f < +\infty$
- Per B.W. $\exists\, x_{n_k}$ con $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}^N$
- $x \in \bar{A}$. Se $x \notin A \Rightarrow x \in \partial A$

Ma allora, dall'ipotesi (2), avrei che

$$\lim_{k\to\infty} f(\underset{\downarrow\, x}{x_{n_k}}) = \lim_{x' \to x} f(x') = +\infty \leftarrow \text{per (2)}$$

DI NUOVO QUESTO CONTRADDICE $f(x_{n_k}) \to \inf_A f$

- QUINDI $x \in A$. A questo punto posso scrivere:

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \qquad (f \text{ è continua})$$

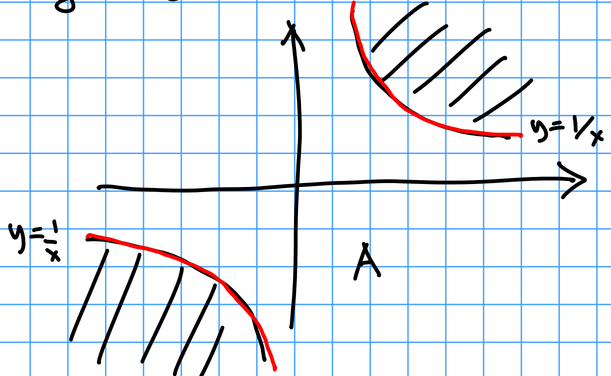
$$\downarrow$$

$$\inf_A f \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(x) = \inf_A f}$$

Dunque x è p.to di minimo per f su A #

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 - \log(1-xy)$

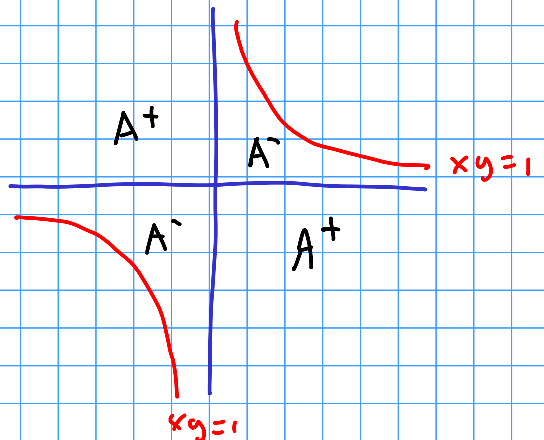
f ha come dominio $A = \{(x,y) : xy < 1\}$



VOGLIO DIMOSTRARE CHE f ha minimo su A !!

Lo dimostro verificando che valgono (1) e (2) dette sopra.

(1) $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \underbrace{x^2+y^2}\ \underbrace{-\ln(1-xy)} = +\infty$



$A^- = \{ 0 \le xy < 1 \}$

$A^+ = \{ xy < 0 \}$

su A^- $f(x,y) \geq x^2+y^2$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to\infty \\ (x,y)\in A^-}} f(x,y) = +\infty$

NON SERVONO

$\displaystyle\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to\infty \\ (x,y)\in A^+}} f(x,y)$??

Non occorre distinguere i punti di A^+ e A^-

$\ln(1-xy) \le \ln(1+|xy|) \le \ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad f(x,y) \geq x^2+y^2 - \ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right) =$

$\|(x,y)\|^2 - \ln\left(1+\frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right)$

(*)

È chiaro che $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \|(x,y)\|^2 - \ln\left(1+\frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right) = +\infty$

dato che $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 - \ln\left(1+\frac{t^2}{2}\right) = +\infty$ e

ANALISI 1 (il logaritmo perde)

$\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \|(x,y)\| = +\infty$

COMPONENDO I DUE LIMITI

(*)

$\Rightarrow$ per il confronto tra i limiti (infiniti) $\Rightarrow$

$\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$

HO DIMOSTRATO CHE VALE (1)

(2) Devo dimostrare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ (**)

per ogni $(x_0, y_0) \in \partial A$

Dato che $A = \{ xy < 1 \}$ (e $(x,y) \to xy$ è continua)

$\Rightarrow \partial A \subset \{ xy = 1 \}$ (in realtà posso dim. che vale "=")

Per la (2) basta dim. che vale (##) quando $x_0 y_0 = 1$ DUNQUE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2+y^2-\ln(1-xy) = +\infty \quad \text{se } x_0 y_0 = 1$$

questo segue dai teoremi di calcolo dei limiti

$$x^2 \to x_0^2 \qquad y^2 \to y_0^2 \qquad xy \to 1 \qquad 1-xy \to 0$$

$$\Rightarrow -\ln(1-xy) \to +\infty$$

$$f(x,y) \to \text{"} x_0^2 + y_0^2 + \infty \text{"} = +\infty$$

ABBIAMO DIMOSTRATO ANCHE (2)

$\Longrightarrow$ f ha minimo su A.

VICEVERSA È CHIARO CHE f non ha max dato che $\sup_A f = +\infty$ per quanto appena visto #

OSS. $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Se g è continua e $A = \{ P : g(P) < c \}$ $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Sicuramente A è aperto $\Rightarrow A \cap \partial A = \emptyset \Rightarrow \partial A \subset \{ g(P) \geq c \}$

Però anche $A' = \{ P : g(P) > c \}$ è aperto e $A' \cap A = \emptyset$

Ne segue che $\bar{A} \cap A' = \emptyset \Rightarrow \partial A \cap A'$

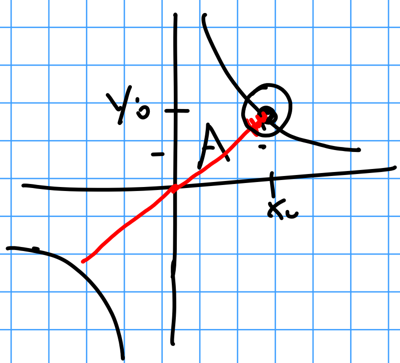
Dunque se $P \in \partial A \Rightarrow \boxed{g(P) = c}$

Potrebbe succedere che $\partial P \neq \{g(P)=c\}$.

Nel caso dell'esempio precedente: $A = \{xy < 1\}$

se prendo (x_0, y_0) con $x_0 y_0 = 1$ vedo che $(x_0, y_0) \in \partial A$.

INFATTI $(x_0, y_0) \notin A$ inoltre se $|t|<1$



$(t x_0, t y_0) \in A$ perché

$(t x_0)(t y_0) = t^2 x_0 y_0 = t^2 < 1$ se $|t|<1$

Dunque vicino quanto voglio a (x_0, y_0) trovo i punti $(t x_0, t y_0) \in A$

Quindi in ogni $B((x_0, y_0), r)$ trovo PUNTI DI A: $(t x_0, t y_0)$ / PUNTI FUORI DI A: (x_0, y_0)

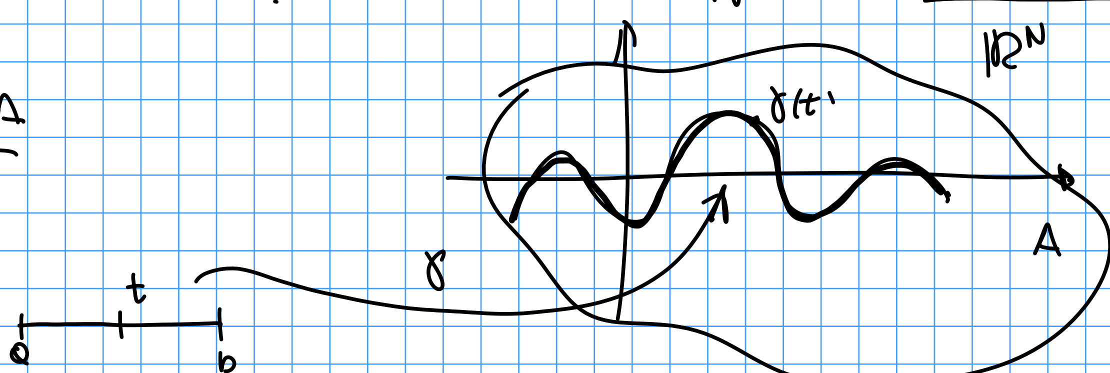
$(x_0, y_0) \in \partial A$

POSSIAMO FARE LA PAUSA
FINO ALLE 18.20

CURVE

Def. Chiamo "curva" in $\mathbb{R}^N$ (o in $A \subset \mathbb{R}^N$) una applicazione $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ (in A) dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. Di solito si suppone che γ è continua

IDEA

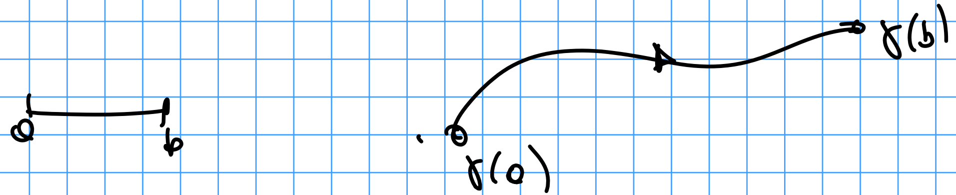


$\gamma(t)$ è "la legge del moto" di un punto che si muove in $\mathbb{R}^N$ (in A)

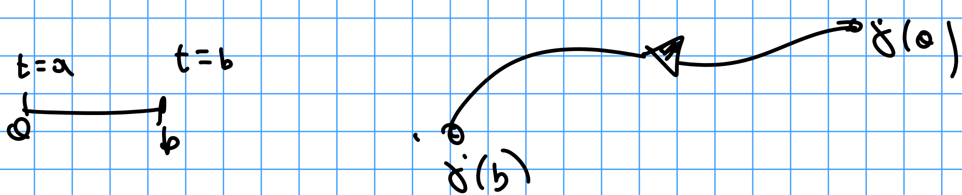
Dico che l'immagine $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^N (A)$

è il "SOSTEGNO" della curva γ

La nozione di curva oltre al sostegno mi dà anche la "legge del moto". In particolare mi definisce "il verso di percorrenza"



CURVE DIVERSE



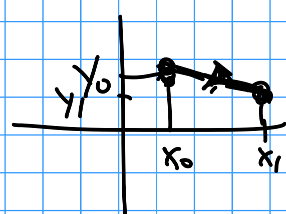
Anche con lo stesso verso due curve diverse possono avere lo stesso sostegno:

<u>ESEMPIO</u> Se $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^N$ posso considerare

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N \quad \text{definita da} \quad \gamma(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = t P_1 + (1-t) P_0$$

il segmento tra P_0 e P_1

Il sostegno di γ



Però se prendo $\tilde{\gamma}(t) = P_0 + t^2(P_1 - P_0) = t^2 P_1 + (1-t^2) P_0$

anche $\tilde{\gamma}$ ha lo stesso sostegno di γ, ma è una curva diversa

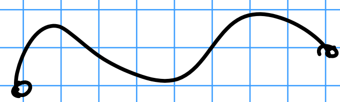
$$\underset{\frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_0}{\underset{\shortparallel}{\tilde{\gamma}\left(\tfrac{1}{2}\right)}} \neq \underset{\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_0}{\underset{\shortparallel}{\gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)}}$$

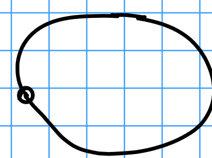
Def. Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ dico che

$\gamma(a)$ è l'estremo destro (il primo estremo) di γ

$\gamma(b)$ è l'estremo sinistro (il secondo estremo) di γ

Se $\gamma(b) = \gamma(a)$ dico che γ è una curva chiusa





OSS. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ $\quad (\gamma_i : I \to \mathbb{R})$

γ continua $\Leftrightarrow$ $\gamma_1 \dots \gamma_N$ CONTINUE

Def. γ si dice "di classe $C^n(I)$" se tutte le componenti $\gamma_1 \dots \gamma_N$ sono di classe $C^n(I)$, cioè $\gamma_1 \dots \gamma_N$ sono derivabili n-volte e tutte le derivate fino all'n-esima sono continue in I

($C^0(I) \leftarrow$ funzioni continue)

Scriverò: $\gamma^{(k)}(t) = (\gamma_1^{(k)}(t) \dots \gamma_N^{(k)}(t))$

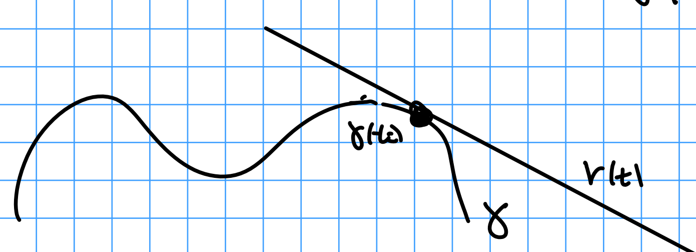
In particolare una curva è C^1 se tutte le sue componenti sono derivabili (e le derivate sono continue)

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_N'(t))$$

$\gamma'(t)$ rappresenta la "velocità" del punto $\gamma(t)$

Se $\gamma'(t_0) \neq 0$ la retta $r(t) = \gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

è detta "retta tangente" a γ nel punto $\gamma(t_0)$



• dico anche che $t\dot{\gamma}(t_0)$ sono le "direzioni tangenti" a γ in $\gamma(t_0)$ (una retta passante per zero)

Def. Dico che γ è <u>regolare</u> se γ è $C^1(I)$ e inoltre

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Se γ è regolare $\Rightarrow$ è ben definita la retta tangente (o la direzione tangente) in ogni punto $\gamma(t_0)$ $t_0 \in I$

Esempio $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

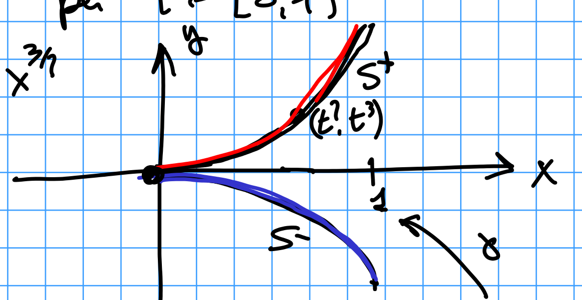
Come è fatto il sostegno $S = S(\gamma)$ di γ ??

Conviene dividere $S = S^+ \cup S^-$ dove

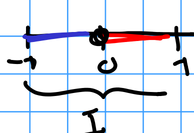
$$S^+ = \{ \gamma(t) : \quad t \in [0,1] \}$$
$$S^- = \{ \gamma(t) : \quad t \in [-1,0] \}$$

$$(x,y) \in S^+ \iff x = t^2,\ y = t^3 \quad \text{per un } t \in [0,1]$$
$$\iff t = \sqrt{x} \quad y = (\sqrt{x})^3 \quad \text{per } t \in [0,1]$$
$$\iff 0 \le x \le 1 \quad y = \sqrt{x}^3 = x^{3/2}$$

$\frac{3}{2} > 1$ $x \to \sqrt{x^3}$ è C^1 ha derivata nulla in $x=0$



$$(x,y) \in S^- \iff x = t^2,\ y = t^3 \quad \text{per } t \in [-1,0]$$
$$\iff t = -\sqrt{x},\ y = (-\sqrt{x})^3 = -(\sqrt{x})^3$$
$$\iff x \in [0,1],\quad y = -(\sqrt{x})^3$$



Si vede dal disegno che in $(0,0) \in S$ c'è una <u>cuspide</u>. NON SEMBRA che S sia "liscio"

γ NON È UNA CURVA REGOLARE anche se γ è C^1

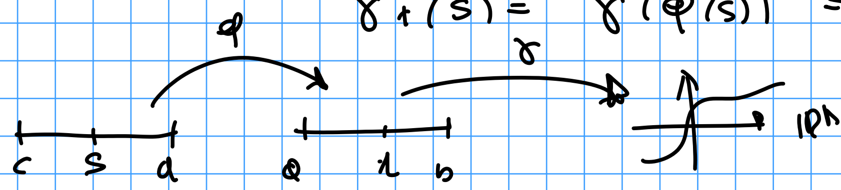
$$\gamma'(0) = (0,0)$$

Def. (riparametrizzazioni)

Sia data una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ e supponiamo che $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ con φ bigettiva e φ C^1

Allora posso definire $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ ponendo

$$\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) = (\gamma \circ \varphi)(s)$$



IN QUESTA SITUAZIONE DICO CHE

φ è una riparametrizzazione (o un cambio di parametro)

γ_1 è una riparametrizzata di γ.

Se poi $\varphi'(s) \neq 0 \ \forall s$ ($\Rightarrow \varphi^{-1}$ è anche lei C^1)

dirò che è un cambio di parametro regolare.

OSS. (a) Se γ_1 è riparametrizzata di γ $\Rightarrow$

sostegno di γ_1 = sostegno di γ

EVIDENTE:

perché φ è bigettiva

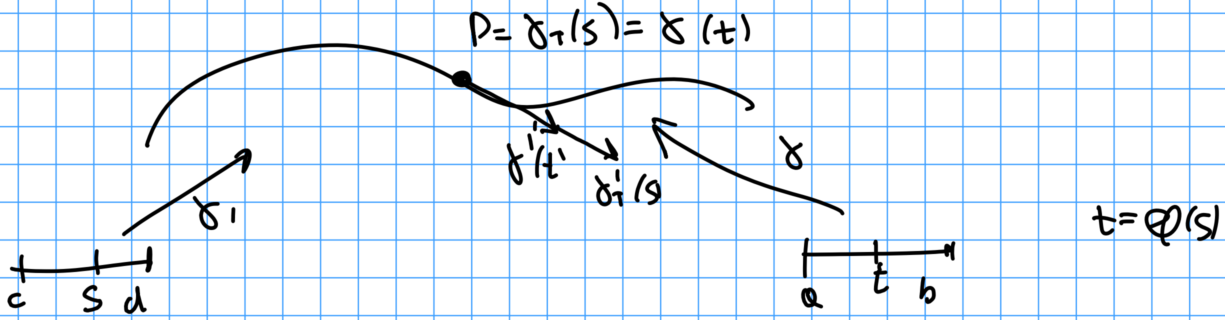
$$\text{sost}(\gamma_1) = \{\gamma_1(s) \ s \in [c,d]\} = \{\gamma(\varphi(s)) : s \in [c,d]\} = \underbrace{\{\gamma(t) : t \in [a,b]\}}_{\text{sost}(\gamma)}$$

(b) Si ha (derivata della composizione - componente per componente)

$$\gamma_1'(s) = \underset{\mathbb{R}}{\varphi'(s)}\ \underset{\mathbb{R}^N}{\gamma'(\varphi(s))}$$

le direzioni $\gamma_1'(s)$, $\gamma'(\varphi(s))$ sono sulla stessa retta

se $\gamma'(\varphi(s)) \neq 0$



(c) dato che φ è bigettiva $\Rightarrow$ φ' ha segno costante.
Allora si distinguono due casi

(1) $\varphi' \geq 0 \iff \varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$

CASO IN CUI γ_1 ha lo stesso verso di γ

$(\gamma_1(c)=\gamma(a),\ \gamma_1(d)=\gamma(b))$

(2) $\varphi' \leq 0 \iff \varphi(c)=b \quad \varphi(d)=a$

CASO IN CUI γ_1 e γ hanno verso opposti

(d) se γ è regolare e φ è regolare $\Rightarrow$ γ_1 è regolare
(la direzione tangente è ben definita in ogni punto)

Def. Dirò che γ è C^1 a tratti (regolare a tratti)
se $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^N$ e ci sono un numero finito di punti $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_k=b$ tali che

- γ è continua su $[a,b]$
- γ è C^1 (regolare) su ogni $]t_{i-1},t_i[$ $i=1..k$
- in ogni t_i esistono $\lim_{t\to t_i^-}\gamma'(t)$ $\lim_{t\to t_i^+}\gamma'(t)$

(con le dovute eccezioni in $t_0=a$ $t_k=b$)

<u>ESEMPIO</u> La $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ammette una riparametrizzazione regolare e dotti :

LO VEDIAMO LUNEDÌ