Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 11 20/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Teorema delle contrazioni X spazio vettoriale normato COMPLETO (per esempio $\mathbb{R}^N$ è ok), $B \subset X$ B chiuso e una funzione $f : B \to B$. Suppongo che f sia una "CONTRAZIONE" cioè esiste α, con $0 \le \alpha < 1$ t.c.

$$\boxed{\| f(x) - f(y) \| \le \alpha \| x - y \| \quad \forall x, y \in B}$$

(f è lipschitziana di costante $\alpha < 1$ $\Rightarrow f$ CONTINUA)

ALLORA ESITE UNICO UN "PUNTO FISSO" per f cioè $\boxed{\exists !\ x \in B \text{ tale che } f(x) = x}$

Dim. • Dimostro prima di tutto che ci può essere un SOLO pt fisso (cioè dimostro l'unicità). Se x_1 e x_2 verificano

$$f(x_1) = x_1 \qquad f(x_2) = x_2 \quad \Rightarrow$$

$$\| x_1 - x_2 \| = \| f(x_1) - f(x_2) \| \le \alpha \| x_1 - x_2 \|$$

se fosse $\| x_1 - x_2 \| \ne 0 \Rightarrow 1 < \alpha$ ASSURDO

$\Rightarrow \| x_1 - x_2 \| = 0 \iff x_1 = x_2$

• Dimostro che esiste un punto fisso. Prendo $\overline{x} \in B$ a caso e costruisco una successione x_n in questo modo:

$$x_0 = \overline{x}, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \quad \dots$$

$$x_n = \underbrace{f(f \dots f(x_0)))}_{n \text{ VOLTE}}$$ o mediante la relazione ricorsiva

$$(R) \begin{cases} x_0 = \overline{x} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$ ⇒ definisce x_n $\forall n \in \mathbb{N}$

Affermo che (x_n) è una successione di Cauchy in X.

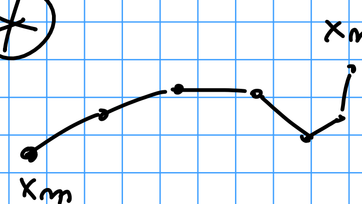
Per questo valuto $\|x_{n+1} - x_n\|$:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \le \alpha \|x_n - x_{n-1}\| \le$$

$$\underbrace{\alpha\,\alpha}_{\alpha^2} \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \le \underbrace{\alpha\alpha\alpha}_{\alpha^3} \|x_{n-2} - x_{n-3}\| \le \dots$$

$$\le \alpha^n \|x_1 - x_0\| = \alpha^n \|f(x_0) - x_0\|$$

$$\boxed{\|x_n - x_{n-1}\| \le \alpha^{n-1} \|x_1 - x_0\|} \quad (*)$$



Ora se $n \ge m$ ho

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots (x_{m+1} - x_m)\|$$

$$\le \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_{m+1} - x_m\|$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i - x_{i-1}\| \underset{(*)}{\le} \sum_{i=m+1}^{n} \alpha^{i-1} \|x_1 - x_0\|$$

HO TROVATO $$\|x_n - x_m\| \le \|x_1 - x_0\| \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} \alpha^{i-1}} \le$$

PEZZO DI SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE $\alpha < 1$

$$\|x_1 - x_0\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha^{i-1} =$$

$$\|x_1 - x_0\| \left(\alpha^m + \alpha^{m+1} + \alpha^{m+2} + \dots \right) =$$

$$\|x_1 - x_0\| \alpha^m \underbrace{\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots \right)}_{\frac{1}{1-\alpha}} = \|x_1 - x_0\| \alpha^m \frac{1}{1-\alpha}$$

Riassumendo se $n \geq m$ ho

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_1 - x_0\| \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \qquad \alpha^m \to 0 \text{ se } m \to \infty$$

Da questo ricavo che (x_n) è di $\boxed{\text{Cauchy}}$: fisso $\varepsilon > 0$ trovo $\bar{n}$ con $\|x_1 - x_0\| \frac{\alpha^m}{1-\alpha} < \varepsilon$ ($\alpha^m \to 0$ se $m \to \infty$ perché $\alpha < 1$)

e allora $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ se $n \geq m \geq \bar{n}$

Dato che X è completo so che $x_n \to x \in X$

Dato che B è chiuso $x \in B$ $\quad (x_n \in B)$

Per le proprietà delle successioni anche $x_{n+1} \to x$

Dalla relazione

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

passando al limite (so che f è continua) ottengo

$$\boxed{x = f(x)}$$

#

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$ Considero $B = B(0,1) = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\subset \mathbb{R}^2$

Considero $T : B \to B$ $\quad T(x,y) = \left(-\frac{y}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$

VERIFICO CHE (a) T manda B in B e (b) T è una contrazione

(a) Se $P = (x,y) \in B \iff \|P\| \leq 1 \iff x^2 + y^2 \leq 1 \implies$

$$\|T(P)\|^2 = \left\| \left(-\frac{y}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \right\|^2 =$$

$$\left(-\frac{y}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \underbrace{\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}} y + \frac{1}{8} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}} x + \frac{1}{8}}_{(*)}$$

$$ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \quad \text{con } a=\frac{1}{2} \quad b=\frac{y}{\sqrt{2}} \Big/ \ a=\frac{1}{2} \quad b=\frac{x}{\sqrt{2}}$$

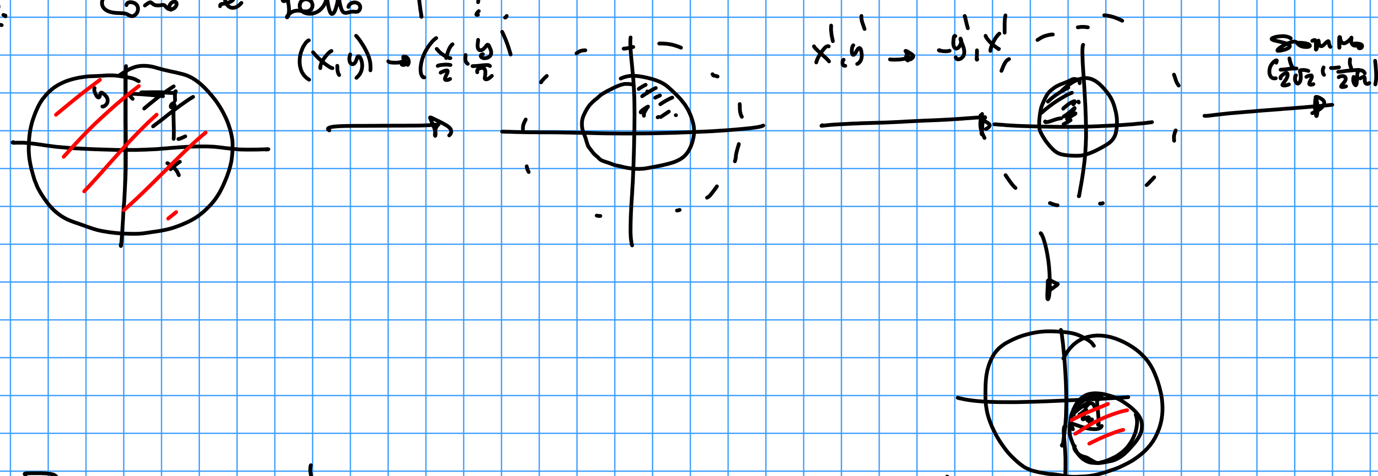
$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{y^2}{2} = \frac{1}{8}+\frac{y^2}{4} \\ \left|\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right| \le \dots \le \frac{1}{8}+\frac{x^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(*) \le \frac{y^2}{4}+\frac{1}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{8}+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8} =$$

$$\frac{\overbrace{y^2+x^2}^{\le 1}}{2}+\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Dunque $\forall\, \|P\|\le 1 \Rightarrow T(P)\le 1$ $\quad$ ($T: B\to B$)

OSS. Come è fatto T??



(b) T è una contrazione: $\quad P=(x,y) \quad P'=(x',y')$

$$\|T(P)-T(P')\| =$$

$$\left\|\left(-\frac{y}{2}+\frac{1}{2\sqrt2}, \frac{x}{2}-\frac{1}{2\sqrt2}\right)-\left(-\frac{y'}{2}+\frac{1}{2\sqrt2}, \frac{x'}{2}-\frac{1}{2\sqrt2}\right)\right\| =$$

$$\left\|\left(-\frac{y-y'}{2}, \frac{x-x'}{2}\right)\right\| = \frac{1}{2}\left\|\left(-(y-y'), x-x'\right)\right\| =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2} = \frac{1}{2}\|P-P'\|$$

$\nwarrow \alpha < 1$

DUNQUE esiste $\bar{P}=(\bar{x},\bar{y}) \in B$ tale che

$$f(\bar{P})=\bar{P}$$

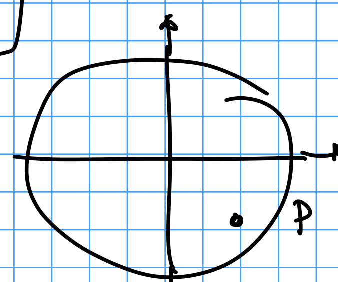
Se faccio i conti vedo che deve essere

$$\left(-\frac{\bar y}{2}+\frac{1}{2\sqrt2},\ \frac{\bar x}{2}-\frac{1}{2\sqrt2}\right)=(\bar x,\bar y) \iff$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\bar y}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt2}=\bar x \\ \dfrac{\bar x}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt2}=\bar y \end{cases} \iff \begin{cases} \bar x+\dfrac{\bar y}{2}=+\dfrac{1}{2\sqrt2} \\ \dfrac{\bar x}{2}-\bar y=\dfrac{1}{2\sqrt2} \end{cases}$$

$$\left(2+\frac12\right)\bar x=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{2\sqrt2} \iff \frac52\bar x=\frac{3}{2\sqrt2} \iff \boxed{\bar x=\frac{3}{5\sqrt2}}$$

$$\bar y=\frac{3}{10\sqrt2}-\frac{1}{2\sqrt2}=\frac{3-5}{10\sqrt2}=\boxed{-\frac{1}{5\sqrt2}=\bar y}$$



$\bar P=\left(\frac{3}{5\sqrt2},-\frac{1}{5\sqrt2}\right)$ è il punto fisso

Vediamo che P è il limite di $P_n=\underbrace{T(T(T(\cdots(P_0)}_{n}))$ dove per esempio $P_0=(0,0)$

Quindi io definisco $P_n=(x_n, y_n)$ con

$$\begin{cases} P_0=(0,0) \\ P_{n+1}=T(P_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x_0=0,\ y_0=0 \\ x_{n+1}=-\dfrac{y_n}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt2} \\ y_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt2} \end{cases} \quad (R)$$

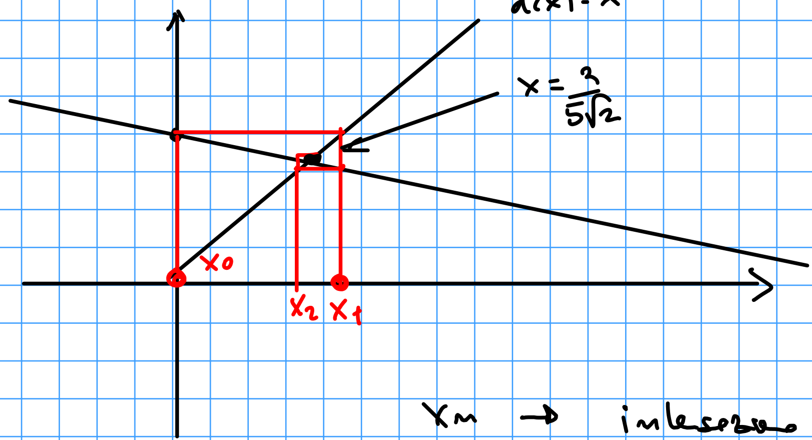
IN R "facciamo un salto di due indici"

(1) $\to$ $x_{n+2}=-\frac{y_{n+1}}{2}+\frac{1}{2\sqrt2}=-\frac12\left(\frac{x_n}{2}-\frac{1}{2\sqrt2}\right)+\frac{1}{2\sqrt2}=-\frac{x_n}{4}+\frac{3}{4\sqrt2}$

(2) $\to$ $y_{n+2}=\frac{x_{n+1}}{2}-\frac{1}{2\sqrt2}=\frac12\left(-\frac{y_n}{2}+\frac{1}{2\sqrt2}\right)-\frac{1}{2\sqrt2}=-\frac{y_n}{4}-\frac{1}{4\sqrt2}$

Nelle due relazioni sopra le x_n (le y_n) dipendono solo dalle x_{n-2} (y_{n-2})

(1) $x_{n+1} = -\frac{x_n}{4} + \frac{3}{4\sqrt{2}}$ ← COME SONO QUESTI PUNTI
$x_0 = 0$



considero la retta

$r(x) = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4\sqrt{2}}$

e la retta $d(x)=x$

x_n → intersezione tra le rette

$$-\frac{x}{4} + \frac{3}{4\sqrt{2}} = x$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{5}{4}x = \frac{3}{4\sqrt{2}} \qquad x = \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

Analogo discorso per le y_n → $-\frac{1}{5\sqrt{2}}$

ENTRAMBE x_{2n} e y_{2n} convergono al loro limite "oscillandoci intorno"