Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 10 19/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Forme quadratiche:

$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Se $\phi > 0$ $\Rightarrow$ $\exists\ \nu > 0$ t.c. $\phi(x) \geq \nu \|x\|^2$ (ν = minimo autoval.)

($\phi < 0$) $\quad$ ($\phi(x) \leq -\nu \|x\|^2$)

Ne segue che

(a) se $\phi > 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{\|x\| \to \infty} \phi(x) = +\infty$

(b) se $\phi < 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{\|x\| \to \infty} \phi(x) = -\infty$

$\phi(x) = x^t A x$

Se ϕ non è né > 0 né < 0 $\Rightarrow$ ϕ è indefinita

SBAGLIATO

AUTOVALORE DI A

La cosa giusta è che se ϕ non è > 0 $\Rightarrow$ $\exists\ \lambda \leq 0$

se ϕ non è < 0 $\Rightarrow$ $\exists\ \lambda \geq 0$

Se non è né > 0 né < 0 ci sono vari casi

(1) tutti gli autovalori sono nulli $\Rightarrow$ $\phi(x) \equiv 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{\|x\| \to \infty} \phi(x) = 0$

(2) c'è almeno un autovalore $\lambda_1 > 0$ e almeno un autovalore $\lambda_2 \leq 0$

(3) c'è almeno un autovalore $\lambda_1 < 0$ e almeno un autovalore $\lambda_2 \geq 0$

nei casi (2) e (3) ϕ non ha limite per $\|x\| \to \infty$

perché (2) $\Rightarrow$ $\exists\ e_1 \neq 0$ (autovettore relativo a λ_1) su cui
$\phi(e_1) > 0$ $\quad (\Phi(e_1) = e_1^t A e_1 = \lambda_1 \|e_1\|^2 > 0)$
$\exists\ e_2 \neq 0$ (autovettore relativo a λ_2) su cui
$\phi(e_2) \leq 0$ $\quad (\Phi(e_2) \dots = \lambda_2 \|e_2\|^2 \leq 0)$

Se faccio i limiti $\quad \lim_{t\to+\infty} \phi(te_1) = \lim_{t\to+\infty} t^2 \underbrace{\phi(e_1)}_{>} = +\infty$

SONO DIVERSI $\Rightarrow \exists$ limite $\|x\| \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \phi(te_2) = \lim_{t\to\infty} t^2 \phi(e_2) = \begin{cases} -\infty & (\lambda_2 < 0) \\ 0 & (\lambda_2 = 0) \end{cases}$$

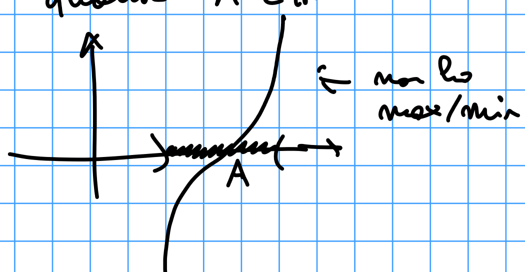
(discorso analogo nel caso (3)) $\quad \#$

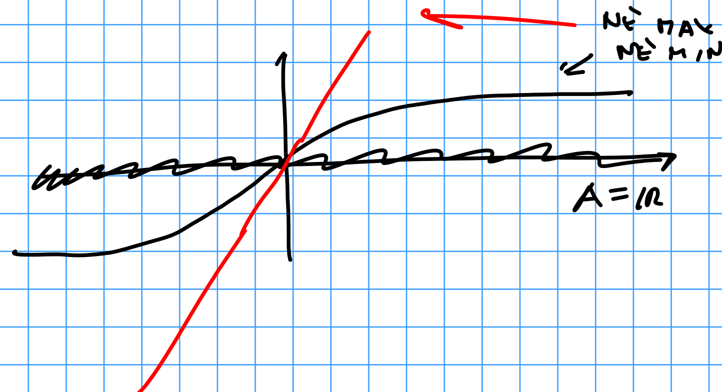
<u>Estensioni di Weierstrass per domini non limitati</u>

W: $\quad$ Se $f : A \to \mathbb{R}$ continua, $A \subset \mathbb{R}^N$ $\quad A$ limitato e chiuso $\Rightarrow$
f ammette max e min.

Se qualcuna delle ipotesi non vale si trovano dei controesempi

più quando $A \subset \mathbb{R}$





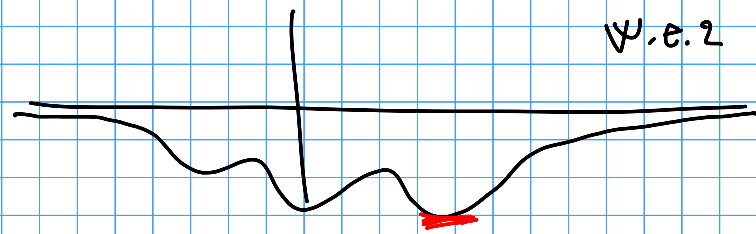
Se aggiungo delle ipotesi su f posso recuperare qualcosa

<u>TEOR. W.E. 1.</u> $\quad$ Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua e se
$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \quad (-\infty) \Rightarrow f$ ha minimo (massimo)

(lo useremo spesso)

<u>TEOR. W.E. 2</u> $\quad$ Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, continua tale che $f(x) < \ell \in \mathbb{R}$
$(f(x) > \ell)$

e $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \ell \Rightarrow f$ ha minimo (massimo)



<u>Dim.</u> (di W.e.1) Caso del minimo. Si fa come nella dim. di Weierstrass: $m = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} f(x) < +\infty$. So che

esiste una successione $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ tale che $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} m$.

Prendiamo un punto a caso $x_0 \in \mathbb{R}^N \Rightarrow m \leq f(x_0)$

Dato che $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$ deve esistere $R > 0$

tale che $\forall\, x \quad \|x\| > R \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + 1 \; (> m)$

Ne segue che $\boxed{x_n \in B(0, R)}$ (per n grande)

(dato che $f(x_n) \to m < f(x_0) + 1$)

Si prosegue come nella dim. di Weierstrass $\Rightarrow$ dato che (x_n) è limitata $\exists\; x_{n_k} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^N$ e si vede

$$f(\bar{x}) = m \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ è punto di minimo} \quad \#$$

<u>Esempio</u> $f(x, y) = x^2 - 8xy + y^4$. VEDIAMO

se $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) = +\infty$ (se questo è vero $\Rightarrow$ <u>f ha minimo su $\mathbb{R}^2$</u>)

<u>Nota</u> se ci fosse y^2 al posto di $y^4 \Rightarrow f$ sarebbe quadratica e indefinita $f_1(x, y) = x^2 - 8xy + y^2 \Rightarrow$ la matrice

associata è $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\det A < 0$ $\left(\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right)$

In effetti se guardo $f(x,0) = x^2$ $f(0,y) = y^2$

(le tutte due tendono a $+\infty$) MA VICEVERSA

$f(x,x) = -6x^2$ che va a $-\infty$ ..

Torniamo a $f(x,y) = x^2 - 8xy + y^4$

dalla dis. $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \Rightarrow |xy| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow$

$-8xy \geqslant 8\frac{x^2}{4} + 8\frac{y^2}{4} = 2x^2 + 2y^2$ $\boxed{\text{BRUTTO!!}}$

$\Rightarrow f(x,y) \geqslant x^2 - 2x^2 + y^2 + y^4 = -x^2 + y^2 + y^4$ $\to -\infty$

FACCIO LA STESSA COSA CON UN PICCOLO TRUCCO

$$|xy| = \left|\overset{a}{\frac{x}{4}} \cdot \overset{b}{4y}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2}16y^2 = \frac{x^2}{32} + 8y^2$$

$$\Rightarrow f(x,y) \geqslant x^2 - \frac{x^2}{32} - 8y^2 + y^4 = \overbrace{\frac{31}{32}x^2}^{f_1(x)} \overbrace{- 8y^2 + y^4}^{f_2(y)}$$

ho trovato $f(x,y) \geqslant f_1(x) + f_2(y)$

dove ~~$f_1(x) \geqslant 0$~~ ~~$f_2(x) \geqslant$ costante~~ f_1, f_2 continue

$\lim_{|x| \to \infty} f_1(x) = +\infty$ $\lim_{|y| \to \infty} f_2(y) = +\infty$ (VINCE y^4 su $-8y^2$)

$$\Rightarrow \lim_{\|(x,y)\|} f(x,y) = +\infty$$

INFATTI Prendiamo una qualunque successione $P_n = (x_n, y_n)$ tale che $\|P_n\| \to \infty$. Allora almeno uno dei due fatti

$\lim_{n \to \infty} |x_n| = +\infty$, $\lim_{n \to \infty} |y_n| = +\infty$ (anche tutti due ...)

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_1(x_n) + f_2(y_n) = +\infty$ (almeno uno diverge e l'altro è inferiormente limitato)

Ho DIM. che $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f_1(x_1) + f_2(x_2) = +\infty$

$\Rightarrow$ (confront) $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$ #

(DIM!)

FATTO: Se ho $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e se

$$f(x_1 \dots x_N) \geq f_1(x_1) + \dots + f_N(x_N) \quad \text{dove}$$

$f_1 \dots f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUE e $\lim_{|x|\to\infty} f_i(x) = +\infty$

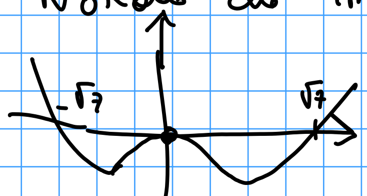
$$\Rightarrow \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$$

DUNQUE HO MOSTRATO che

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} x^2 - 8xy + y^4 = +\infty$$

$\Rightarrow$ (WE1) $\exists \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 - 8xy + y^4 = m$

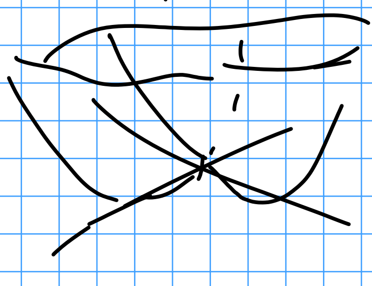
Notiamo che $m < 0$ dato che $f(x,x) = x^2 - 8x^2 + x^4 = x^4 - 7x^2$



$x^4 - 7x^2 = x^2(x^2 - 7)$

$\Rightarrow$ ci sono valori di f con segno < 0

$\Rightarrow m < 0$



Altro esempio

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + 2y^4$$

Dico che $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$ (*)

devo di nuovo tentare di stimare $3xy^2$. Proviamo a solito dis. $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. $\quad xy^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2}$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) \geq 2x^2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^4 + 2y^4 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^4$$

$$= f_1(x) + f_2(y) \qquad \text{con } f_1(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} +\infty \quad f_2(y) \xrightarrow[|y|\to\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow$ VALE $\circledast$.

OSS. Posso scrivere $f(x,y) = \phi(x, y^2)$ dove

$\phi(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2$ è una forma quadratica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{11} = 2 > 0 \\ \det A = 4 - \frac{9}{4} > 0 \\ \text{(Sylvester)} \end{array} \quad \Rightarrow \phi > 0$$

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \phi(x,y) = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \phi(T(x,y)) \quad \text{dove}$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y^2 \end{bmatrix} \quad \text{e si vede che } \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} T(x,y) = \infty$$

(nel senso che $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \|T(x,y)\| = +\infty$). Infatti

$$\|T(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^4} \geq \begin{cases} |x| \\ y^2 \end{cases} \Rightarrow \|T(x,y)\| \geq \frac{|x|}{2} + \frac{y^2}{2}$$

DUNQUE $\quad \Phi(u,v) \xrightarrow[\|(u,v)\|\to\infty]{} \infty \qquad \|T(x,y)\| \xrightarrow[\|(x,y)\|\to+\infty]{} \infty$

$$\Rightarrow \text{(per composizione)} \qquad f(x,y) = \Phi(T(x,y)) \xrightarrow[\|(x,y)\|\to\infty]{} +\infty$$

Dunque $f(x,y)$ ha minimo in $\mathbb{R}$. PERÒ SI VEDEVA SUBITO (sapendo che $f = \phi \circ T$) perché $\min_{\mathbb{R}^2} \phi = 0$

$$\Rightarrow \quad \min_{\mathbb{R}^2} f = 0$$

CIOÈ: se $\phi(x,y)=2x^2-3xy+2y^2$ è ≥ 0

$$\Rightarrow \quad \min \underbrace{2x^2-3xy+2y^2}_{\phi(x,y)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \min \underbrace{2x^2-3xy^2+2y^4}_{\phi(x,y^2)} \geq 0 \qquad \#$$

PAUSA FINO ALLE 16.15

SUCCESSIONI E SERIE IN UNO SPAZIO NORMATO $\mathbb{X}$ (con norma $\|\cdot\|$)

Def. (x_n) è una succ. se è una funzione da $\mathbb{N} \to \mathbb{X}$

$n \longmapsto x_n$ $\quad$ x_n è il valore della succ. (x_n) in n (TERMINE n-ESIMO)

$x(n)$

È chiaro cosa significa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad \|x_n - x\| < \varepsilon)$ segue dalla def. generale di limite con $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

Def. (SERIE) Data una successione (a_n) in $\mathbb{X}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ chiamo "somma parziale / ridotta n-esima" la somma

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (\in \mathbb{X})$$

Chiamo "serie degli a_n" la successione (S_n)

Se esiste $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ dirò che la "serie degli a_n è convergente" oppure che "la successione (a_n) è sommabile"

e chiamerò S "la somma della serie degli a_n"

SCRIVO

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

INDICA LA SOMMA DELLA SERIE CIOÈ UN ELEMENTO DI $\mathbb{X}$

Con un "abuso di linguaggio" dirò anche che

"la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente"
↑ indico la succ. (S_n)

FATTO Se $a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^N)$ allora la serie degli a_n converge se e solo se le N serie numeriche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \quad \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^N$ convergono

e se $S_1 =$ ... $S_N =$ $\Rightarrow (S_1 \dots S_N) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Def. Data una succ. (a_n) in X dico che la serie degli a_n è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ è CONVERGENTE

Nota: $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ è una serie in $\mathbb{R}$ a termini ≥ 0. Dunque a questa serie si possono applicare i criteri tipo confronto. Per esempio se

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \|a_n\| = 1 \quad \text{allora} \quad \left(\begin{array}{l}\text{CONFRONTO CON} \\ b_n = \frac{1}{n^\alpha}\end{array}\right)$$

$\sum \|a_n\|$ conv. se $\alpha > 1$ DIVERGE $\alpha \leq 1$

RICORDIAMO che in $\mathbb{R}$ vale:

Se $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

(CONV. ASSOLUTA $\Rightarrow$ convergenza)

$\boxed{\text{VALE ANCHE IN } \mathbb{R}^N}$: Se $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ convergente

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente (a un pto di $\mathbb{R}^N$) ($a_n \in \mathbb{R}^N$)

Dim. Se $a_n = (a_n^1, \dots, a_n^N)$ ho

$$|a_n^i| \leq \|a_n\| = \sqrt{(a_n^1)^2 + \dots + (a_n^N)^2}$$

$\Rightarrow$ Se $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i|$ converge (criterio del confronto) (teorema in $\mathbb{R}$) $\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m^i$ converge.

MA allora $\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \sum (a_n^1, \dots, a_n^N)$ ho come somma

$$a = \left(\sum a_m^1, \dots \sum a_m^N \right)$$ #

CONVENGO CHE se $\boxed{a_n \geq 0}$ (numeri reali ≥ 0)

$\sum a_m$ è sempre definita e può valere $+\infty$

HA senso perché $S_m = a_1 + \dots + a_m$ è una successione numerica crescente $\Rightarrow \lim_{m \to \infty} S_m$ esiste e può valere $+\infty$ (NON $-\infty$)

DUNQUE se $\boxed{a_n \geq 0}$ ho senso scrivere $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\in [0, +\infty] \right)$

Allora posso scrivere $\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} a_m < +\infty}$ per indicare che

la serie numerica a termini ≥ 0 è convergente

(Se a_n non sono ≥ 0 NON HA SENSO SCRIVERE $\sum a_n < +\infty$)

Per dire che (a_n) è ass. convergente scrivo $\sum_{m=1}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$

Se $\sum_m \|a_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_m a_m$ CONVERGE

COMPLETEZZA DI UNO SPAZIO NORMATO X

Sia X uno spazio vettoriale normato (con norma $\|\cdot\|$)

Def. Se (x_m) è una succ. in X, dico che (x_n) è di Cauchy se vale:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{m} : \quad \forall n, m \geq \bar{m} \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

se n ed m sono grandi (abbastanza) x_n e x_m sono vicini (quanto voglio)

FATTO se $\boxed{x_n \to \ell \in X \Rightarrow (x_n) \text{ è di Cauchy}}$

Dim So che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \|x_n - \ell\| < \varepsilon \ (\varepsilon/2)$

Dato $\varepsilon > 0$ posso prendere $\bar{n}$ corrispondente a $\varepsilon/2$

Allora se $n, m \geq \bar{n} \Rightarrow \|x_n - x_m\| = \|(x_n - \ell) + (\ell - x_m)\| \leq$

$\|x_n - \ell\| + \|x_m - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ #

TEOREMA In $\mathbb{R}$ ogni succ. di Cauchy ammette limite

Questa proprietà non vale per $\mathbb{Q} = \{\text{razionali}\}$

ed è equivalente all'"assioma di completezza"

DEF. Dico che uno spazio normato X è <u>COMPLETO</u> se ogni sua successione di Cauchy ammette limite.

ALLORA <u>$\mathbb{R}$ è completo</u> <u>$\mathbb{R}^N$ è completo</u>

TEOREMA IN OGNI SPAZIO COMPLETO X vale:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge}}$$

(ASSOLUTA CONV. $\Rightarrow$ CONVERGENZA)

Dim. Supponiamo che (x_n) sia una succ. di punti in X

supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. Poniamo

$$S_n = x_1 + \dots + x_n \qquad \text{(le somme parziali degli } x_n\text{)}$$

Per dim. che $\sum_n x_n$ converge devo far vedere che S_n ammette limite. Dato che X è completo basta mostrare che

(S_n) è una succ. di Cauchy

Vediamo $\| S_n - S_m \|$ $\quad (n \geq m)$

$$\| (x_1 + \dots x_n) - (x_1 + \dots + x_m) \| =$$

$$\| x_{m+1} + x_{m+2} + \dots x_n \| \leq \|x_{m+1}\| + \dots + \|x_n\|$$

$$\| S_n - S_m \| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{m} \|x_i\| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|$$

Dato che la serie $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|}_{\text{la chiamo } S} \in \mathbb{R}$

Dato che $\boxed{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|} \to S \Rightarrow (\sigma_n)$ è di Cauchy $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n, m \geq \bar{n} \quad |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$

Ne segue che se $n, m \geq \bar{n} \quad \| S_n - S_m \| < \varepsilon$ (VEDI LA DIS. SOPRA)

Ho DIM. che (S_n) è di Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ ha limite #