Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 09 14/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^4}$$

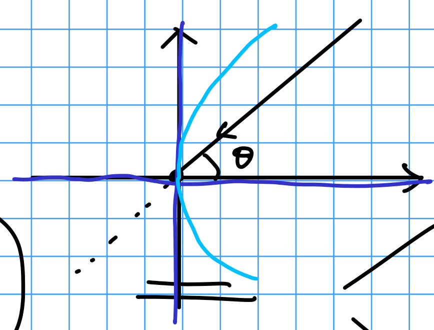
$\boxed{\text{Fisso } \theta}$ considero

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$

$$\frac{x\,y^2}{x^2+y^4} = \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)} = \frac{\rho\cos\theta\sin^2\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)}$$

faccio il limite per $\rho\to 0^+$ CON θ FISSATO

QUESTO È IL LIMITE SULLA RESTRIZIONE A UNA RETTA



$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\theta\sin^2\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)} \quad \begin{cases} 0 & \text{se } \cos\theta\neq 0 \ \text{(NON È INDETERMINATA)} \\ ?? & \text{se } \cos\theta = 0 \end{cases}$$

se $\cos\theta = 0$ $\quad \| \quad 0 \ \forall \rho>0$ ← TORNA PROPRIO PERCHÉ SIAMO SULLA RETTA – SU QUESTA RETTA LA FUNZIONE È NULLA

$(x=0 \quad \lim_{y\to 0^+} f(0,y) = \lim_{y\to 0^+} 0 = 0$

Se poi mi metto su una curva che è "tangente" alla retta $(x=0)$ si vede che f NON TENDE A ZERO!!

ALTRI ESEMPI (Rosciotti le volte scorse)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{y^4}{x^2+y^4}}_{f(x,y)} = \; ??$$

Provo a vedere cosa succede sulla retta $y = mx$

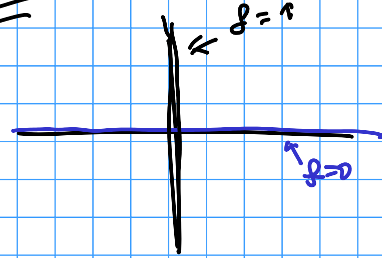
: faccio $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^4}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^2}{1+m^4x^2} = 0$

ATTENZIONE: non ho considerato la retta verticale $x=0$.

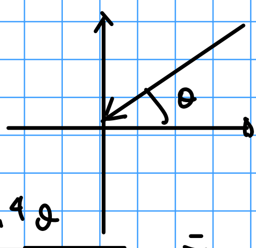
IN QUESTO CASO DEVO FARE

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4} = 1 \neq 0$$

IL $\boxed{\text{LIMITE NON ESISTE}}$



Avrei potuto considerare $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ scrivere $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ e fare il limite sulla semiretta $(\rho > 0)$



(θ è FISSATO)

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^4\sin^4\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^4\sin^4\theta} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\sin^4\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4} = \begin{cases} = 0 & \text{se } \cos\theta \neq 0 \\ = 1 & \text{se } \cos\theta = 0 \end{cases}$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4}$ (in modo simile potrei trattare $\frac{y^5}{x^2+y^4}$)

Potrei fare i limiti sulle rette $\to$ trovo <u>ZERO PER OGNI RETTA</u>

Proviamo a dimostrare che il limite è <u>ZERO</u>

Devo ancora di "maggiorare" $\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^4}\right| \leq$ FUNZIONE CHE TENDE A ZERO $= g(x,y)$

$\Leftrightarrow$, devo maggiorare $|x^3| \leq \underbrace{g(x,y)}_{?!}(x^2+y^4)$

Posso scrivere $|x|^3 = |x|\, x^2 \leq \underbrace{|x|}_{g(x,y)}(x^2+y^4) \Rightarrow$

$0 \leq \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^4}\right| \leq |x|$ e so che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

Per i carabinieri ho che $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^4} = 0}$

- $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} = 0}$ infatti

$$0 \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right| |y| \leq \frac{x^2+y^4}{x^2+y^4}|y| = |y|$$

dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0 \Rightarrow$ TESI

TORNIAMO AI TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

<u>RISULTATO PRELIMINARE</u>

(B.W.) OGNI SUCC. LIMITATA in X di dimensione finita AMMETTE UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE

<u>IDEA di DIM</u> Mettiamo che $X = \mathbb{R}^2$. Ho una succ.

(P_n) in $\mathbb{R}^2$ limitata. Questo significa:

$P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ $\quad x_n^2 + y_n^2 \leq M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |x_n| \leq M$ e $|y_n| \leq M$

Dato che so che B.W. vale in $\mathbb{R} \Rightarrow$

esiste una estratta da (x_n) che converge a un $x \in \mathbb{R}$

$\exists\, n_k : x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$; allora (y_{n_k}) è un'estratta di (y_n)

ed è ancora limitata. Dunque (y_{n_k}) ha un'estratta che tende ad un $y \in \mathbb{R}$: $\exists\, k_h$ tale che

$y_{n_{k_h}} \to y$; MA ANCHE $x_{n_{k_h}} \to x$

(perché $x_{n_k} \to x$ e passando a $x_{n_{k_h}}$ continuo a tendere a x)

Alla fine $P_{n_{k_h}} \to (x, y)$ e ho finito la dim. #

PROP. $A \subset \mathbb{X}$ ($\mathbb{X}$ normato).

A è chiuso $\iff$ $\forall (x_n)$ succ. di punti di A, con $x_n \to x$

allora $x \in A$

TEOR. (WEIERSTRASS) Se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua

A è limitato e chiuso in $\mathbb{X}$ di dimensione finita ($\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$)

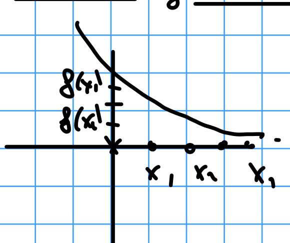
$\Rightarrow$ f ammette max e min in A

Dim. Facciamo il minimo.

Sicuramente posso considerare $m = \inf \underbrace{\{f(x) : x \in A\}}_{\text{è un sottinsieme di } \mathbb{R},\ \neq \emptyset}$

$m \in [-\infty, +\infty[$

Fatto generale: esiste sempre una successione (x_n) in A



tale che $\boxed{f(x_n) \to m}$ (sia che $m \in \mathbb{R}$, sia che $m = -\infty$)

(inf = 0)

Dato che $x_n \in A$, A è limitato $\Rightarrow$ (B.W.) trovo un'estratta

(x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{X}$

Dato che A è chiuso $\Rightarrow x_0 \in A$ (ci posso fare f sopra)

Uso la continuità: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

per il teorema sulle succ $\Rightarrow$ $(x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0))$

DUNQUE $\boxed{\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)}$

MA $\left(f(x_{n_k})\right)$ è estratta da $\left(f(x_n)\right)$ e sapevo che $f(x_n) \to m$

$\Rightarrow$ $m = f(x_0)$ (m non è $-\infty$)

DUNQUE $f(x_0) = \inf f\{f(x) : x \in A\}$ CIOÈ x_0 è pto di MINIMO

#

Applicazione di Weierstrass

Supponiamo che $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sia una forma quadratica

($\phi(x) = x^t L x$ con L matrice $N \times N$ simmetrica)

Supponiamo $\Phi(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ $x \neq 0$.

Allora esiste $\nu > 0$ tale che

(*) $\Phi(x) \geq \nu \|x\|^2$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

Dim. Poniamo $S = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}}_{S = n^{-1}(\{1\})}$ (la sfera unitaria)

- S limitata (tutti i suoi punti x hanno $\|x\| \leq 1$)
- S è chiuso in quanto è la "controimmagine" di un chiuso $F = \{1\}$ tramite la funzione norma $n(x) = \|x\|$

Allora esiste il $\boxed{\min_{x \in S} \Phi(x)}$ (per Weierstrass)

(si deve verificare che Φ è continua)

Dunque $\exists$ $x_0 \in S$: $\Phi(x) \geq \Phi(x_0) > 0$ $\forall x \in S$

Dato che $x_0 \neq 0$ $\Phi(x_0) > 0$ (Φ è def. > 0)

Chiamo $\nu = \Phi(x_0) = \min_{x \in S} \phi(x) > 0$

$$\boxed{\Phi(x) \geq \nu > 0 \quad \forall x \in S}$$

Se ora $x \in \mathbb{R}^N$ $\underline{\underline{x \neq 0}}$ posso scrivere $x = \|x\| \dfrac{x}{\|x\|}$

e $\dfrac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow$ $\Phi(x) = \Phi\left(\|x\| \dfrac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^2 \Phi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\|^2 \nu$

#

Si potrebbe vedere che ν = minimo autovalore di L

(è contato il fatto che $\underline{\phi(t x) = t^2 \phi(x)}$)

PAUSA FINO ALLE 18.25

$$\left(\phi(x) = \overset{(x_1, x_N)\,(L)\binom{x_1}{x_N}}{x^t L x} \qquad \Phi(tx) = (t x^t) L (tx) = t^2 \phi(x) \right)$$

$= Q(x, x)$ Q bilineare (simmetrica)

$\phi(tx) = Q(tx, tx) = t^2 Q(x, x)$

$$\boxed{\Phi(tx) = t^2 \Phi(x)}$$

<u>Conseguenza</u> Se $\phi > 0 \Rightarrow \lim\limits_{\|x\| \to \infty} \Phi(x) = +\infty$

$\Phi(x) \geq \underbrace{\nu \|x\|^2}_{\to +\infty \text{ se } \|x\| \to \infty}$

Se $\phi < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\|x\| \to \infty} \Phi(x) = -\infty$

<u>Dunque</u> Se ho $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} \underbrace{x^2 - 5xy + 3y^2}_{\Phi(x,y) \text{ è una forma quadratica}} = ?!$

Devo guardare se $\underline{\underline{\phi > 0}}$ o $\underline{\underline{\phi \text{ INDEFINITA}}}$

Devo allora guardare la matrice $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{pmatrix}}_{L}$ $\quad a_{11} = 1 > 0$

$\det L = 3 - \dfrac{25}{4} < 0$

$\Rightarrow$ è indefinita: esistono due vettori e^+ e^- tali che

$\Phi(e^+) > 0 > \Phi(e^-)$ $\Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \phi(t e^+) = \lim\limits_{t \to \infty} t^2 \phi(e^+) = +\infty$

$\Phi(x)$ NON HA LIMITE PER $\|x\| \to \infty$

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t\bar{e}) = \lim_{t\to+\infty} t^2\phi(\bar{e}) = -\infty$$

Se invece considero $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} 3x^2 - 5xy + 3y^2 = +\infty$

studio la $L = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad a_{11} = 3 > 0$ $\quad \det = 9 - \frac{25}{4} > 0$ $\Rightarrow$ DEF. > 0

- ANZI POSSO DIRE:

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \underbrace{3x^2 - 5xy + 3y^2}_{\phi(x,y)} + \underbrace{2x - 7y}_{\ell(x,y)} = +\infty$$

ϕ quadratica $\quad \phi > 0$

ℓ lineare : $\quad \ell(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (Schwartz) $\quad |\ell(x,y)| \leq \|(x,y)\| \cdot \|(2,7)\| = \sqrt{53}\,\|(x,y)\|$

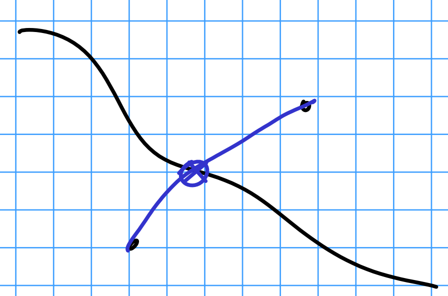
$\Rightarrow \quad \ell(x,y) \geq -\sqrt{53}\,\|(x,y)\|$

$\phi(x,y) \geq \nu\,\|(x,y)\|^2$ $\quad$ DUNQUE con $\nu > 0$

$$\phi(x,y) + \ell(x,y) \geq \underbrace{\nu\,\|(x,y)\|^2 - \sqrt{53}\,\|(x,y)\|}_{\text{tende a } +\infty \text{ se } \|(x,y)\|\to\infty}$$

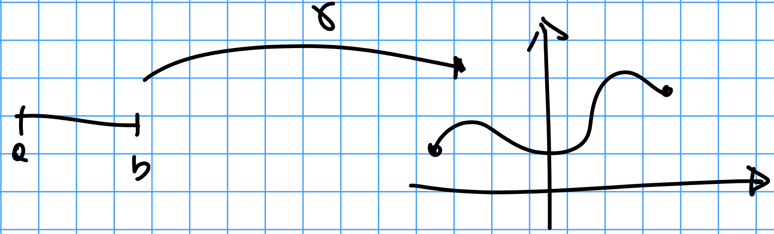
$$\left(\lim_{t\to+\infty} \nu t^2 - \sqrt{53}\, t = +\infty\right)$$

TEOREMI DEGLI ZERI IN PIÙ VARIABILI ??



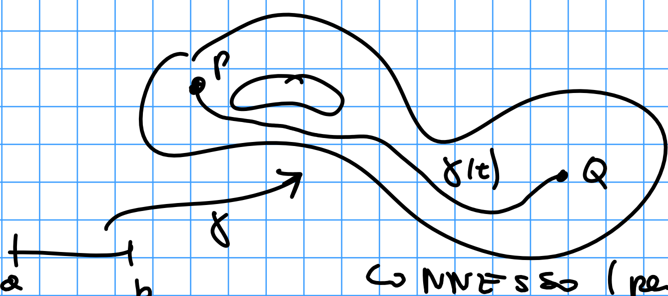
Def. Chiamo curva in X (in $A \subset X$) funzione CONTINUA da un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ a valori in X (in A)

Ti ricordo che ho $\boxed{\gamma : [a,b] \to X}$ $(\to A \subset X)$ γ continua

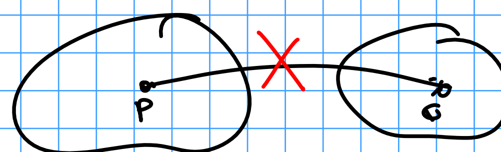


<u>**Def.**</u> Se $A \subset \mathbb{R}^N$ dico che A è CONNESSO (PER ARCHI) quando dati due punti $P, Q \in A$ esiste una curva $\gamma : [a,b] \to A$ tale che $\gamma(a) = P$ $\gamma(b) = Q$

Dati due punti qualunque in A li posso congiungere con una curva "contenuta" in A (Potrei sempre considerare $a=0$ $b=1$)



CONNESSO (per archi)

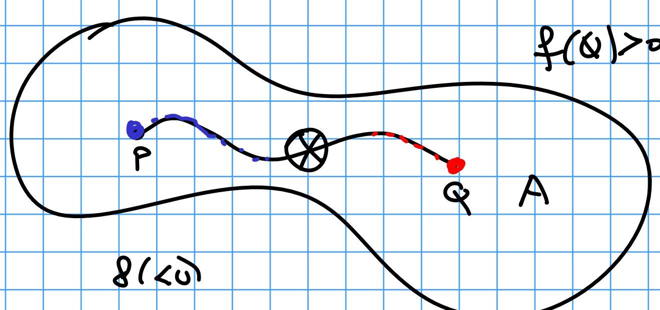


NON CONNESSO

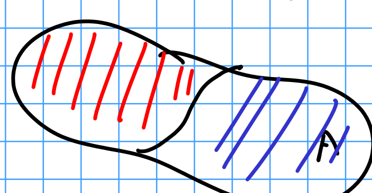
TEOREMA (Tipo zeri)

Suppongo A connesso (per archi)

Suppongo che $f : A \to \mathbb{R}$, $f(P) < 0$ $f(Q) > 0$ dove $P, Q \in A$



$\forall$ curva $\gamma : [0,b] \to \Omega$ con $\gamma(0) = P$ $\gamma(b) = Q$
$\exists$ $t \in]0, b[$ con $f(\gamma(t)) = 0$



Gli zeri di f "SCONNETTONO" A

Dim. Basta applicare il teorema degli zeri in $\mathbb{R}$ alla funzione $g(t) = f(\gamma(t))$ è CONTINUA da $[0,b] \to \mathbb{R}$
$f(P) = g(0) < 0$ $\quad g(b) = f(Q) > 0$ $\Rightarrow$ esiste uno zero #

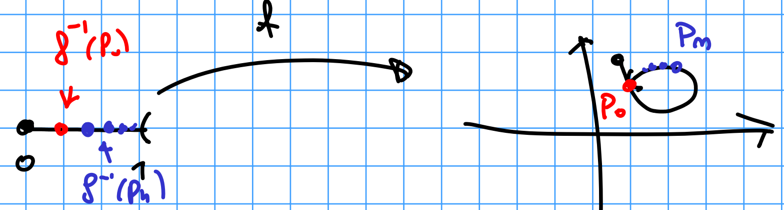
PROBLEMA: Se $f: A \to X_1$ $\quad A \subset X$
f continua e iniettiva $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
Posso dire $B = \{ f(x) : x \in A \} = f(A) \subset X_1$
IMMAGINE DI A tramite f

Risulta definita $f^{-1}: B \to A$
POSSO DIRE SE f^{-1} è continua? NON È FACILE

Ricorda: Se $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo f iniettiva
$\Rightarrow f(I) = J$ è un intervallo e $f^{-1}: J \to I$ è continua

In $\mathbb{R}^N$ NON È FACILE TROVARE "CHE FORMA" DEVE AVERE A per dedurre che f^{-1} è continua

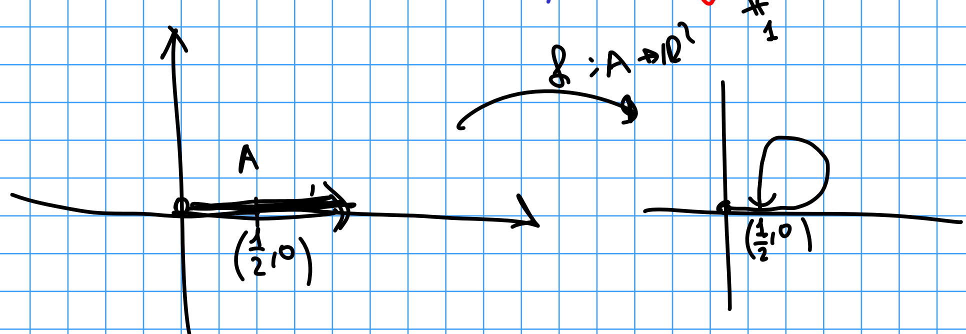
CONTROESEMPIO $f: [0,1[\to \mathbb{R}^2$ fatta così:



f è iniettiva ed è continua

MA f^{-1} NON È CONTINUA: se prendo $P_n \in \mathbb{R}^2$ come sopra
$P_n \to P_0$ (in $\mathbb{R}^2$) $\quad t_n = f^{-1}(P_n)$ sono i punti blu in $[0,1[$
$(t \to 1 \notin [0,1[)$ $\qquad f^{-1}(P_0) \in A$

#



TEOREMA Se $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ e $A \subset \mathbb{X}$ è chiuso e limitato

$f : A \to \mathbb{X}_1$ ($\mathbb{X}$ $\mathbb{X}_1$ spazi normati di dimensione finita)

f iniettiva e continua.

Allora $B = f(A)$ è limitato e chiuso (qui basta solo f continua)

e $f^{-1} : B \to A$ è continua

A noi interessa il caso in cui A è aperto.

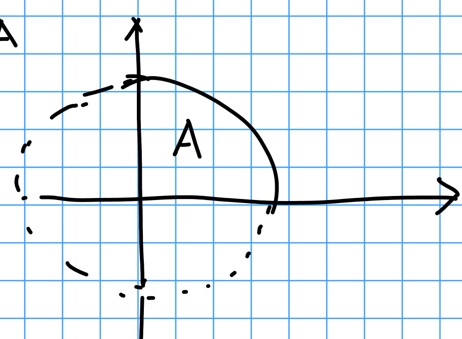
Vedremo più avanti come trovare un altro teorema CHE USA LE DERIVATE

LASCIAMO PER ORA IN SOSPESO LA QUESTIONE

Esercizio

Considero $A = \{ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^2$

Vorrei descrivere $\mathring{A}$ e ∂A



IDEA UTILE $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ $A_1 = \{x \geq 0\}$ $A_2 = \{y \geq 0\}$

$A_3 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

OGNUNO DI QUESTI È CHIUSO IN QUANTO CONTROIMMAGINE DI UN CHIUSO, TRAMITE UNA CONTINUA

$A_1 = \{ (x,y) : x \geq 0 \} = g^{-1}([0, +\infty[)$

dove $g(x,y) = x$ g è continua

$[0, +\infty[$ è chiuso in $\mathbb{R}$

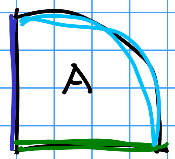
$A_3 = h^{-1}(]-\infty, 1])$ con $h(x,y) = x^2 + y^2$

$\Rightarrow$ A è chiuso (INTERSEZIONE DI CHIUSI È CHIUSO)

RISPOSTA $\mathring{A} = \{ x>0, y>0, x^2+y^2<1 \}$

$\partial A = \{ x=0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1 \} \cup \{ x\geq 0, y=0, x^2+y^2 \leq 1 \}$

$\cup \{ x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x^2+y^2=1 \}$



FINIAMO LUNEDÌ