Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 08   13/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Nozione di continuità: $\mathbb{X}$ $\mathbb{X}_1$ spazi vett. normati

$f : A \to \mathbb{X}_1$ $x_0 \in A$

f continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ tale che se $\underset{x \in A}{x \in B(x_0, r)} \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ • se x_0 è isolato in A ogni f è continua in x_0

• se x_0 è di acc. per A f continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

f continua in A se f è continua in ogni $x_0 \in A$.

Prop. f è continua in A $\Leftrightarrow$

per ogni insieme aperto $F \subset \mathbb{X}_1$ si ha che

$f^{-1}(F)$ è aperto in A (?!)

Ricordo che $f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}$ (controimmagine di F tramite f.)

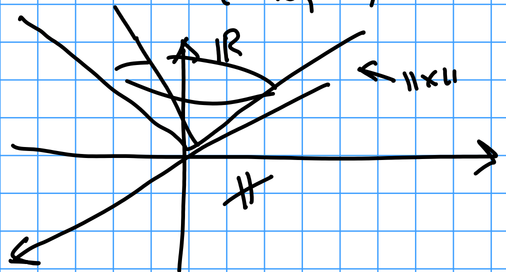
Inoltre G aperto in A significa che $G = G_1 \cap A$ con G_1 aperto

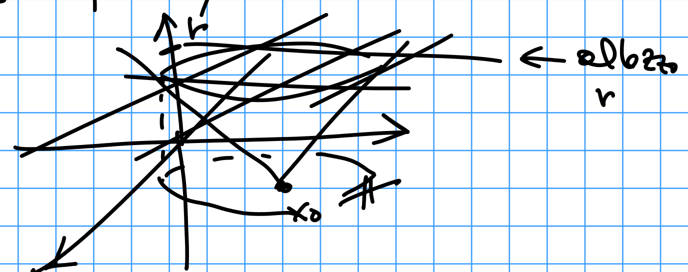
Se A è aperto F è aperto: $A \iff F$ è aperto ← SITUAZIONE TIPICA

Se $\underline{A = X}$ la proprietà sopra si legge $f^{-1}(F)$ aperto

Esempio: Abbiamo visto che $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ è aperto (usando le definizioni). Potevamo dedurlo dalla proprietà sopra se dimostriamo che la funzione "norma" è continua. Infatti se chiamo $n(x) = \|x - x_0\|$ allora

$$B(x_0, r) = n^{-1}(]-\infty, r[)$$





è chiaro che la semiretta $]-\infty, r[= \{t < r\} \subset \mathbb{R}$ è aperta. Se n è continua $\Rightarrow$ $n^{-1}(]-\infty, r[)$ è aperto

VEDIAMO CHE n è continua da $\underline{X} \to \mathbb{R}$. Per dimostrarlo uso la seguente disug.: siano $x, y \in X$

$$n(x) - n(y) = \|x - x_0\| - \|y - y_0\| =$$

$$\|(x - y) + (y - x_0)\| - \|y - y_0\| \leq$$

$$\|(x - y)\| + \|y - y_0\| - \|y - y_0\| = \|x - y\|$$

$$n(x) - n(y) \leq \|x - y\|$$

se scambio x e y $\Rightarrow$

$$n(y) - n(x) \leq \|y - x\| = \|x - y\| \quad \Rightarrow$$

$$-\|x - y\| \leq n(x) - n(y) \leq \|x - y\|$$

CIOÈ $\boxed{|n(x) - n(y)| \leq \|x - y\|}$ vero qualunque sia la norma - segue dalla dis. triangolare

È facile ricavare che n è continua.

FATTO GENERALE

$$f: A \to \mathbb{X}_1 \qquad A \subset \mathbb{X}$$

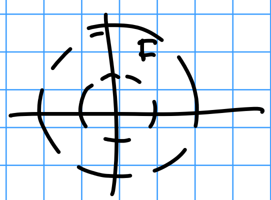
Def. dico che f è Lipschitziana (di costante L) se

$$\| f(x) - f(y) \|_{\mathbb{X}_1} \leq L \, \| x - y \|_{\mathbb{X}}$$

(la n di prima è lipschitziana di costante $L = 1$ come funzione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{R}$)

Teorema Se f è lip. $\Rightarrow$ f è continua
(si deduce facilmente dalla def.)

Altro esempio $F = \{ 1 < \|x\| < 2 \}$ è aperto in $\mathbb{X}$



dato che è la controimmagine di $]-1, 2[$ $(\subset \mathbb{R})$ mediante $n(x) = \|x\|$

$F_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y < xy \}$ è aperto dato che $F_1 = \{ \underbrace{x + y - xy}_{g(x,y)} < 0 \}$ e $\boxed{\{ t < 0 \} \text{ è aperto in } \mathbb{R}}$

g è continua

$\{ (x,y) : \ g(x,y) \in]-\infty, 0[\ \}$

Prop. f è continua in A $\Longleftrightarrow$

per ogni insieme chiuso $C \subset \mathbb{X}_1$ si ha che $f^{-1}(C)$ è chiuso in A (?!)

Inoltre G chiuso in A significa che $G = G_1 \cap A$ con G_1 chiuso

Se A è chiuso questo equivale a G chiuso – per esempio se $A = \mathbb{X}$ ($\mathbb{X}$ è sia aperto che chiuso)

IN PARTICOLARE se $f: X \to X_1$

f continua $\Leftrightarrow$ $\forall F$ aperto in X_1 $f^{-1}(F)$ è aperto in X $\Leftrightarrow$
$\forall C$ chiuso in X_1 $f^{-1}(C)$ è chiuso in X

Ne deduco per esempio che

$$\overline{B}(x_0, R) = \{ \|x - x_0\| \le R \} \text{ è chiuso}$$

dato che $m(x) = \|x - x_0\|$ è continua e $]-\infty, R]$ è chiuso in $\mathbb{R}$

(avrei potuto usare $[0, R]$: $\overline{B}(x_0, R) = m^{-1}([0, R]) = m^{-1}(]-\infty, R])$
chiusi

ATTENZIONE. se f continua da $X \to X_1$) e

se $F = \underbrace{\{ f(x) < c \}}_{\text{aperto}}$ $C = \underbrace{\{ f(x) \le c \}}_{\text{chiuso}}$

non è detto né che $C = \overline{F}$ né che $F = \overset{\circ}{C}$

Un controesempio: Prendo $f(x) = -\|x\|$ da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$F = \{ x : f(x) < 0 \}$ $C = \{ x : f(x) \le 0 \}$

$\{ x : \|x\| > 0 \} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\{ x : \|x\| \ge 0 \} = \mathbb{R}^2$

$A \setminus B = \{ x \in A, x \notin B \}$

$\overline{F} = C$ VERO $F = \overset{\circ}{C}$ FALSO $\overset{\circ}{C} = \mathbb{R}^2$

(si può dim che è sempre vero $F \subset \overset{\circ}{C}$)

Altro controesempio $f(x) = \|x\|$

$F = \{ \|x\| < 0 \} = \phi$ $C = \{ \|x\| \le 0 \} = \{(0,0)\}$

$\emptyset = \overline{F} = C \neq \emptyset$ FALSO $\qquad$ $F = \overset{\circ}{C}$ VERO

È COMUNQUE VERO CHE:

$$\overline{\{ f(x) < c \}} \subset \{ f(x) \leq c \}$$
$$\overset{\circ}{\{ f(x) \leq c \}} \supset \{ f(x) < c \}$$

Sarà importante nel seguito considerare insiemi definiti come

$$A = \{ x : g(x) < 0 \}, \quad A_1 = \{ x : g(x) \leq 0 \}$$

vedremo in seguito quali $\boxed{\text{ulteriori}}$ proprietà su f permettono di dire che $\overline{A} = A_1$, $\overset{\circ}{A_1} = A$ e che

$$\partial A = \partial A_1 = \{ x : g(x) = 0 \} \quad \#$$

TEOREMI. (sulle funzioni continue su un insieme)

① Weierstrass. (in analisi 1: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f ha max / min su $[a,b]$)

Per trovare l'equivalente in X ($\mathbb{R}^n$) ricordo che

- C è chiuso in X se $\partial C \subset C$
- C è limitato se esiste $R > 0$ tale che $C \subset B(0,R)$ (se $\exists R \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in C$ $\|x\| \leq R$)

PROP. $C \subset X$ è chiuso $\Longleftrightarrow$ per ogni successione (x_n) di punti di C ($x_n \in C$ $\forall n$) tale che $x_n \to x$ in X ALLORA $x \in C$

C contiene tutti i limiti delle successioni dei suoi punti

TEOREMA DI BOLZANO WEIERSTRASS

Se (x_n) è una successione in X DI DIMENSIONE FINITA

(PENSARE A $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$) e se (x_n) è limitata

(cioè $\exists R : \|x_n\| \leq R \ \forall n$). ALLORA

. (x_n) ammette una sottosuccessione convergente :

$\exists (n_k)$ successione strett. crescente di interi.

$\exists x \in \mathbb{X}$ tali che $x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$

<u>TEOREMA DI WEIERSTRASS</u> $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$

A chiuso e limitato. Allora f ammette max e min su A cioè $\exists x_{min}$ e $x_{max} \in A$ (NON NECESS. UNICI) tali che

$$\forall x \in A \quad f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

$A \ni x_{min}$ si dice (un) punto di minimo per f

$\mathbb{R} \ni f(x_{min})$ si dice IL minimo di f <u>è UNICO</u>

$A \ni x_{max}$ si dice (un) punto di massimo per f

$\mathbb{R} \ni f(x_{max})$ si dice IL massimo di f <u>è UNICO</u>