Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 07 12/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

LIMITI INFINITI / LIMITI ALL'INFINITO

Ci sono un po' di casi da definire

CASO 1

$f : A \to \mathbb{R}^M$ (o in X sp. vett. normato)
$A \subset \mathbb{R}$

Si può definire $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^N$ $(e_1, \dots, e_M)$
$(x \to -\infty)$

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x))$

se e solo se $\lim_{x \to +\infty} f_i(x) = \ell_i$ $i = 1 \dots M$
$(x \to -\infty)$

COMPONENTE i esima

CASO 2

$f : A \to \mathbb{R}$ x_0 di occ. per A
$A \subset \mathbb{R}^N$

Si può definire $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$

$\Leftrightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}$ $\exists r > 0$ tale che $\forall x \in B(x_0, r)$, $x \in A$, $x \neq x_0$

$\Rightarrow$ $f(x) \geq c$ $(f(x) \leq c)$

f diventa sempre più grande (più piccola) se x si avvicina a x_0

CASO 3 "per $\|x\| \to \infty$"

$f : A \to \mathbb{R}^M \qquad A \subset \mathbb{R}^N$

[∞ è di accumulazione per A se A non è limitato
cioè se $\forall R > 0 \quad \exists \; x \in A$ con $\|x\| > R$]

Dico che $\ell \in \mathbb{R}^M$ è il limite di $f(x)$ per $\|x\| \to \infty$

e scrivo
$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \ell$$

se $\forall \; \varepsilon > 0 \quad \exists \; c > 0$ tale che
$\forall x \in A$ con $\|x\| > c$ si ha $f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$

$f(x)$ si avvicina a ℓ quando $\|x\|$ diventa sempre più grande

CASO (3') Se $f : A \to \underbrace{\mathbb{R}}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$

dico che $\displaystyle\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty \; (-\infty)$ se

$\forall \; c \in \mathbb{R} \quad \exists \; R > 0$ tale che
se $\|x\| > R$, $x \in A \implies f(x) \geq c \quad (f(x) < c)$

$f(x)$ diventa sempre più grande (piccola) se $\|x\|$ diventa grande

CASO 4 $\quad f : A \to \mathbb{R}^M \qquad A \subset \mathbb{R}^N$

∞ di accumulazione per A (cioè A illimitato)

Dico che $\displaystyle\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty \iff \lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = +\infty$

$\|f(x)\|$ diventa grande se $\|x\|$ diventa grande

ESEMPIO $\displaystyle\lim_{\|x,y\| \to \infty} (\underbrace{x^2 + 2y^2 + xy}) = +\infty$

devo usare la def. (3')

Useremo la diguaglianza dei numeri reali:

$$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Dim. $a, b \geq 0$ dunque devo dim $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow$

$2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ VERA

Dunque posso scrivere

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow -xy \geq -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2y^2 + xy \geq x^2 + 2y^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}y^2 \geq$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$$

HO TROVATO $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy \geq \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$

Posso applicare la def. (3') Infatti se fisso $C \geq 0$ allora posso prendere $R = \sqrt{2C}$. Con questa scelta di R

$\|(x,y)\| \geq R = \sqrt{2C} \Rightarrow \|(x,y)\|^2 \geq 2C \Rightarrow$

$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 \geq \frac{1}{2} 2C = C$ HO VERIFICATO LA DEF.

PROPRIETA'

- Le proprietà con $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$ sono le solite ← x deve variare in $\mathbb{R}$ (componente per componente)

- x_0 di acc. per A (CONTIENE ANCHE IL CASO $\|x\| \to \infty$)

  $g, f : A \to \mathbb{R}$

  Se $f(x) \to +\infty$ $(-\infty)$ e g è inferiormente limitata (superiormente)

  $\Rightarrow f(x) + g(x) \to +\infty$ $(-\infty)$

- Se $f(x) \to +\infty$ $(-\infty)$ e $g(x) \geq \varepsilon > 0$

$\Rightarrow f(x)\,g(x) \to +\infty \; (-\infty)$

Se $f(x) \to +\infty \; (-\infty)$ e $g(x) \leq -\varepsilon < 0 \Rightarrow f(x)\,g(x) \to -\infty \; (+\infty)$

- Se $|f(x)| \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \to 0$

- Se $f(x) \to 0$, $f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} \to +\infty$

(se poi f ha segno $>0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \to +\infty$

$<0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \to -\infty$)

- Se $f(x) \geq g(x)$ e se $g(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$f(x) \leq g(x)$ e $g(x) \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$\left(\|f(x)\| \geq \|g(x)\| \right.$ e $\left. g(x) \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty \right)$

CI SONO POI LE SOLITE FORME INDETERMINATE

che vanno trattate caso per caso.

Def. (SUCCESSIONI). Chiamo <u>successione</u> di punti di $\mathbb{X}$ ($\mathbb{X}$ sp. vett.) una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ (a è definita sui numeri interi).

TRADIZIONALMENTE si scrive a_n al posto di $a(n)$ e (a_n) al posto di a

$a_1 \; a_2 \cdots a_n$ invece $a(1) \; a(2) \cdots a(n)$

Dato che $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è illimitato superiormente ha senso fare $\lim_{n\to\infty} a_n$ ($\ell \in \mathbb{X}$ / ∞ / $\pm\infty$ se $a_n \in \mathbb{R}$)

<u>Teorema</u> (collegamento tra limiti di funzioni e limiti di successioni)

$f : A \to \mathbb{X}_1$ $\quad A \subset \mathbb{X}$ $\quad$ ($\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}_1$ sp. vett. normati)

- $x_0 \in \mathbb{X}$ è di accumulazione per A SE E SOLO SE

esiste una successione (x_n) di punti di A con $x_n \neq x_0$
tale che $x_n \to x_0$ (qui è evidente che $n \to +\infty$)

- $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell \in \mathbb{X}$ SE E SOLO SE

per ogni successione (x_n) di punti di A, con $x_n \neq x_0$ e
$x_n \to x_0$ SI HA CHE $f(x_n) \to \ell$

"VERSIONI CON INFINITI"

CASO 1

- ∞ è di accumulazione per A (A illimitato) $\Longleftrightarrow$
  $\exists\ (x_n)$ di punti di A tale che $\|x_n\| \to \infty$
- $f(x) \xrightarrow{\|x\| \to \infty} \ell \Longleftrightarrow \forall\ (x_n)$ succ. in A con $\|x_n\| \to \infty$
  si ha $f(x_n) \to \ell$

CASO 2 ORA $f : A \to \mathbb{R}$

- x_0 di occ. per A . . . (come sopra)
- $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} +\infty\ (-\infty) \iff \forall\ (x_n)$ in A, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$
  si ha $f(x_n) \to +\infty\ (-\infty)$

CASO 3 . Sempre $f : A \to \mathbb{R}$

- ∞ di occ per A . . . . (come sopra)
- $f(x) \xrightarrow{\|x\| \to \infty} +\infty\ /-\infty \Longleftrightarrow \forall\ (x_n)$ in A, $\|x_n\| \to \infty$
  si ha $f(x_n) \to +\infty\ /-\infty$

Vediamo di rifare l'esempio di prima

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} (\underbrace{x^2 + xy + 2y^2}_{f(x,y)}) = +\infty$$

Per dimostrare posso far vedere che:

SE $x_n^2 + y_n^2 \to +\infty \Rightarrow x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 \to \infty$
(qui $n \to \infty$)

con gli stessi calcoli visti prima :

$f(x_n, y_n) = x_n^2 + x_n y_n + 2 y_n^2 \geq \frac{1}{2} x_n^2 + \frac{1}{2} y_n^2 \to +\infty$

per i teoremi di Analisi 1

$\Rightarrow \quad f(x_n, y_n) \to +\infty$ HO VERIFICATO $f(x,y) \to +\infty$ $\|(x,y)\| \to \infty$

Vediamo ora un po' di esercizi sui limiti

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = ?$ (ESISTE ?)

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = ?$ (ESISTE ?)

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = ?$ (ESISTE ?)

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = ?$ (ESISTE ?)

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4} = ?$ (ESISTE ?)

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4} = ?$ (ESISTE ?)

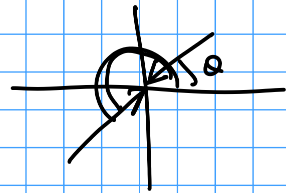
PAUSA fino alle 16.10

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ non è definita in (0,0) ma (0,0) è di acc. per $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

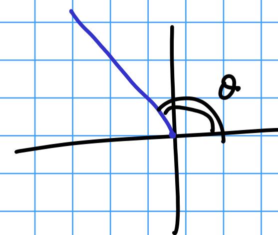
Provo a calcolare il limite sulle rette :

fisso m e cerco $f(x, mx) \longrightarrow ??$ OPPURE fisso $\theta \in [0, 2\pi[$ e faccio il limite

$$\lim_{t\to 0^+} f(t\cos\theta, t\sin\theta)$$ (limite sulle "semirette")



(parametrizzo la semiretta: $t \to (t\cos\theta, t\sin\theta)$



Usiamo il secondo metodo: cerco $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\cos\theta\, t \sin\theta\, t}{\cos^2\theta\, t^2 + \sin^2\theta\, t^2} =$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\cancel{t^2}\sin\theta\cos\theta}{\cancel{t^2}} = \sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$ ← DIPENDE DA θ

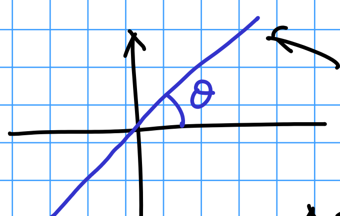
IL LIMITE NON ESISTE

<u>OSS</u> $f(x,y)$ è LIMITATA: $|f(x,y)| \le$ costante

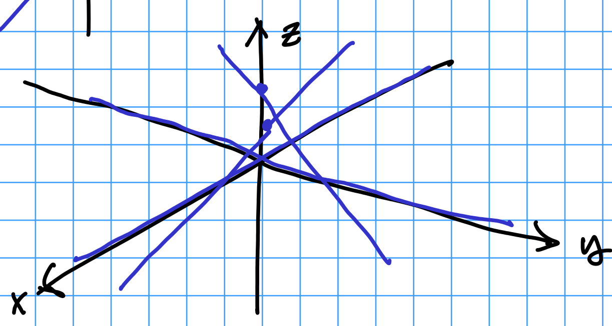
INFATTI $\displaystyle\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$

INOLTRE IL CALCOLO VISTO SOPRA MOSTRA CHE

$f(x,y)$ è costante sulle rette uscenti dall'origine



← $f(x,y) = \sin\theta\cos\theta$



il max è per $\theta = \frac{\pi}{4}$

e vale $\frac{1}{2}$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |y| \underbrace{\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|}_{\le 1/2} \le \frac{|y|}{2}$$

Sappiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{2} = 0$

Per i due carabinieri $\Rightarrow$ $0 \le \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{y}{2}\right| \Rightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \to 0$

0

$\Leftrightarrow \frac{xy^2}{x^2+y^2} \to 0$

(Altra proprietà : limitato · infinitesimo = infinitesimo)

• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ Provo a fare i limiti sulle rette

$$\frac{(t\cos\theta)(t\sin\theta)^2}{(t\cos\theta)^2+(t\sin\theta)^4} = \frac{t^3\cos\theta\sin^2\theta}{t^2\cos^2\theta+t^4\sin^4\theta} =$$

$$\frac{t\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}$$

se $\cos\theta \neq 0$ tende a zero $t\to0$

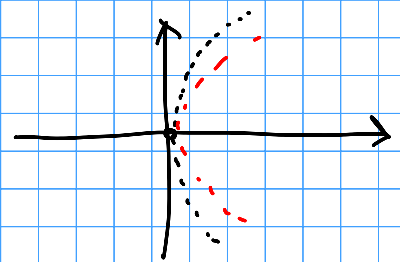
se $\cos\theta = 0$ fa zero $\forall t$

IN OGNI CASO (θ FISSATO) $\frac{t\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta} \xrightarrow{t\to0} 0$

Posso tentare di dimostrare che $\frac{xy^2}{x^2+y^4} \to 0$

NON CI RIESCO !! Se provo a trovare una maggiorazione

trovo $\frac{xy^2}{x^2+y^4} \le \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^4}{2}}{x^2+y^4} = \frac{1}{2}$ MA NON TROVO UNA QUANTITÀ CHE TENDE A ZERO



Provo ad avvicinarmi a $(0,0)$ su una parabola $x=y^2$ $(x=my^2)$

$$\lim_{y\to0} f(y^2,y) = \lim_{y\to0}\frac{y^2y^2}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \;!! \quad \left(\frac{m}{1+m^2}\right)$$

IL LIMITE NON ESISTE

OSS. POTEVO NOTARE SUBITO CHE

$f_2(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si ottiene dalla funzione

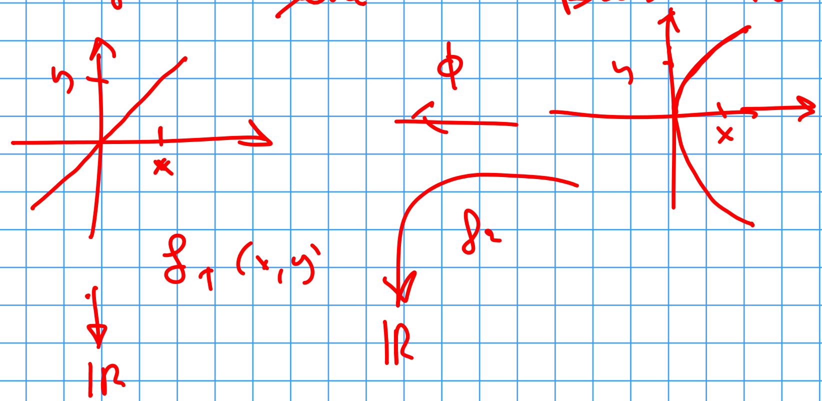
$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ mediante composizione

$f_2(x,y) = f_1(x, y^2)$. Dato che f_1 NON HA LIMITE IN $(0,0)$

"SI CAPISCE" che f_2 NON HA LIMITE

NOTA la trasformazione $(x,y) \to (x, y^2)$ $\phi(x,y) = (x,y^2)$

trasforma le ~~rette~~ in ~~parabole~~ (anzi parabole in rette)



CONTINUITÀ

$\mathbb{X}$ $\mathbb{X}_1$ sp vett. con delle norme ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ con norme euclidee)

$A \subset \mathbb{X}$ $\qquad x_0 \in A$ $\qquad f : A \to \mathbb{X}_1$

Def. f è continua in x_0 se

- x_0 è isolato in A OPPURE
- x_0 è di acc. per A e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

OPPURE:

f continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ tale che $x \in B(x_0, r),\ x \in A$
$\Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$

se x_0 è isolato è automatico, (prendo r tale che in $B(x_0,r) \cap A$ c'è solo x_0

Si dice che f è continua su A se f è continua in ogni $x_0 \in A$

<u>Proprietà</u>

- Se f e g sono continue in x_0 $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ è continua in x_0

- Se $f : A \to \mathbb{R}^M$. f è continua in x_0 $\Leftrightarrow$ ogni componente f_j è continua in x_0 $(j = 1 \cdots M)$

- Le proiezioni $f(x) = x_i$ $(i = 1 \cdots N)$ sono continue in ogni punto $x = (x_1 \cdots x_N)$

- f e g continue in x_0 a valori reali $\Rightarrow$ $f \cdot g$ continua in x_0 / $\frac{f}{g}$ continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

- f e g continue $\Rightarrow$ $g \circ f$ è continua (QUANTITÀ SENSO)

[f continua in x_0 g continua in $y_0 = f(x_0)$
$\Rightarrow$ $g \circ f$ è continua in x_0]