Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 06 07/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

PROPRIETÀ DEL LIMITE

$(\mathbb{X}, \| \ \|)$ e $(\mathbb{X}_1, \| \ \|_1)$ spazi vettoriali normati

$f, g : A \to \mathbb{X}_1$ $A \subset \mathbb{X}$ $x_0 \in \mathbb{X}$

x_0 di acc. per A , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\ell, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{X}_1$

Unicità: se $f(x) \to \ell_1$, $f(x) \to \ell_2$ per $x \to x_0$
allora $\ell_1 = \ell_2$

Linearità: se $f(x) \to \ell_1$ $g(x) \to \ell_2$ per $x \to x_0$
allora $\lambda f(x) + \mu g(x) \to \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$

Limite e prodotti (a) se $g : A \to \mathbb{R}$ e
$f(x) \to \ell$ $g(x) \to \lambda$ allora $g(x) f(x) \to \lambda \ell$ per $x \to x_0$

(b) Se in $\mathbb{X}_1$ c'è un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ che induce la norma $\| \ \|_1$ e se $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$ per $x \to x_0$
allora $(f(x), g(x)) \to (\ell_1, \ell_2)$

(E) Se $C \subset \mathbb{X}_1$ è un insieme chiuso, se $f(x) \subset C$ per ogni x in A e se $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$ allora $\ell \in C$

(F) Se $F \subset \mathbb{X}_1$ è un insieme aperto, se $\ell \in F$ e se $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$, allora

⊛ $\boxed{\text{esiste } r>0 \text{ tale che } \forall x \in B(x_0,r),\ x \in A,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in F}$

La proprietà ⊛ si può leggere "$f(x) \in F$ per x vicino a x_0"

COMMENTO La nozione di limite $f(x) \to \ell$ $x \to x_0$

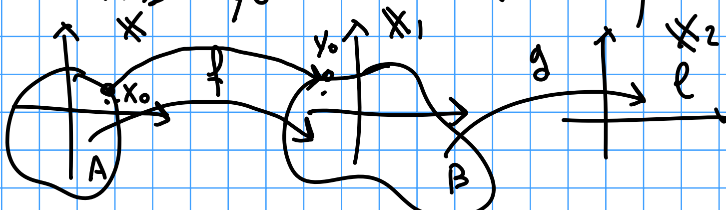
- NON RICHIEDE CHE $f(x_0)$ sia definita (non chiedo $x_0 \in A$, A = dominio di f)
- Anche se $f(x_0)$ è definita ℓ NON DIPENDE da $f(x_0)$: se $f(x) \to \ell$ $x \to x_0$ e $f_1(x) = f(x)$ per le $x \neq x_0$ allora $f_1(x) \to \ell$ (Basta che $f_1(x) = f(x)$ per le x "vicine a x_0")

(H) (Due carabinieri) $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ Se
$A \subset \mathbb{X}$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e se $f(x) \to \ell$, $h(x) \to \ell$ $(x \to x_0)$

$\Rightarrow$ $g(x) \to \ell$ $(x \to x_0)$

(I) (limite della composizione) $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ spazi vettoriali normati (da $\| \ \|$, $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$) $A \subset \mathbb{X}$ x_0 di acc. per A
$B \subset \mathbb{X}_1$ y_0 di acc. per B; $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{X}_2$



$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0}$$

$$\boxed{\lim_{y \to y_0} g(y) = \ell}$$

È ben definita $g \circ f : A \to \mathbb{X}_2$ $\left((g \circ f)(x) = g(f(x)) \right)$.

SUPPONGO CHE $f(x) \neq y_0$ per le x vicine a x_0 $(x \neq x_0)$

(IPOTESI VERA SE $y_0 \notin B$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = l$$

(mi autorizzo a fare un "cambio di variabile" nel limite:

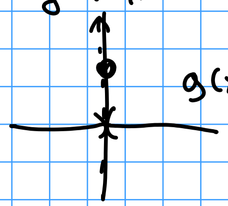
$$\lim_{x\to x_0} g(\underbrace{f(x)}_{y}) = \lim_{y\to y_0} g(y)$$

se $y = f(x) \to y_0$ + $y \neq y_0$ se $x \neq x_0$)

<u>CONTROESEMPIO</u> SE MANCA L'IPOTESI IN ROSSO:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = 0 \quad \forall x$ $\quad$ $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = 0$

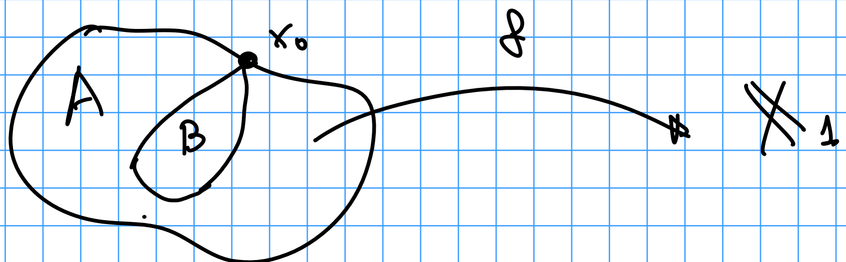


$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = y_0$ $\quad$ $\boxed{\lim_{y\to y_0} g(y) = 0}$ (non conta $g(0) = 1$)

PERÒ $g(f(x)) = g(0) = 1 \quad \forall x \Rightarrow g(f(x)) \to 1 \neq 0$

(J) (limite su una restrizione) $\quad f: A \to X_1 \quad A \subset X$

(x_0 di occ. per A), $\quad B \subset A \quad x_0$ di occ per B



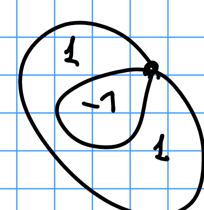
Posso chiamare "restrizione" di f a B la funzione $\tilde f : B \to X_1$ con $\tilde f(x) = f(x) \quad \forall x \in B$.

<u>TEOREMA</u> $\quad$ Se $f(x) \to l \Rightarrow \tilde f(x) \to l$. Posso scrivere:

$$\text{Se } \lim_{x\to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} f(x) = l$$

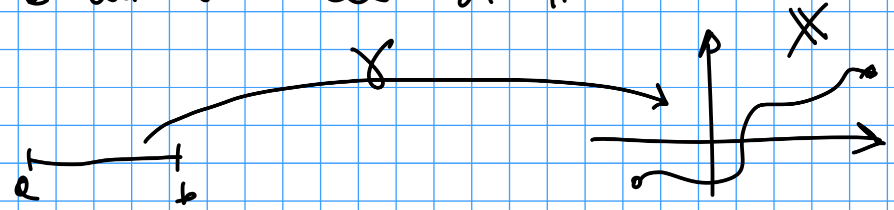
È in generale falso il viceversa: può succedere che

$\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$ $\quad$ ma che $\exists \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} f(x)$



"<u>Restrizione alle curve</u>"

Def. Chiamo <u>CURVA</u> in $\mathbb{X}$ una funzione $\gamma : I \to \mathbb{X}$ dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$



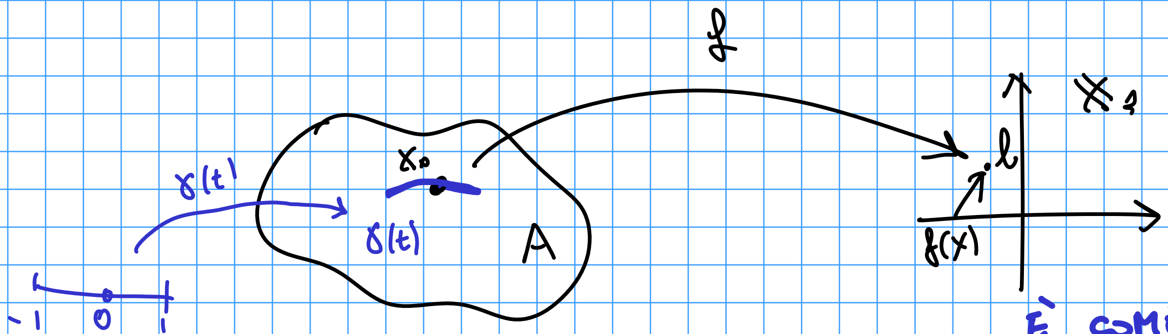
Dirò che γ è continua se $\forall\, t_0 \in I \quad \lim_{t \to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$

<u>CONSEGUENZA DI (I)</u> Se $f : A \to \mathbb{X}_1$ con $A \subset \mathbb{X}$, x_0 di acc per A

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Allora per ogni curva $\gamma : [-1, 1] \to A$ tale che

$\gamma(0) = x_0$ $\quad$ γ è continua $\quad$ $\underbrace{\gamma(t) \neq x_0}$ se $t \neq 0$



È COME SE RESTRINGESSI

ALLORA $\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = l$ $\quad$ f a $\gamma([-1,1]) = B$

Per ricavarlo dalla proprietà (I) devo chiamare

g la f e f la γ

<u>OSS.</u> Questo ultimo risultato è utile per dimostrare che $\boxed{\text{IL LIMITE NON ESISTE}}$ trovando due curve come sopra su cui f ha limite diversi.

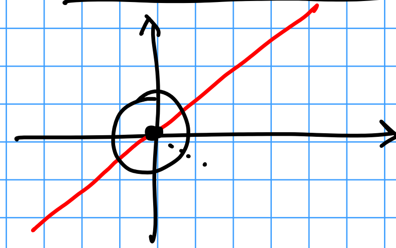
<u>Alcuni esempi</u> $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\underbrace{\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}}_{80\%\ \text{così} \dots}$

Ci chiediamo se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x+y)}{x-y}$

$\boxed{\text{Ricordo che } \lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1}$

NOTIAMO $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ $\quad$ $(0,0)$ è di acc. per A

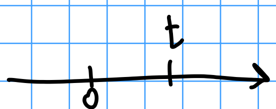
$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x-y}$$

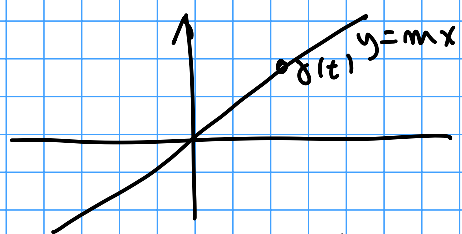


Non è semplice capire se esiste questo limite

TENTATIVO (per capire chi sia il limite - SE ESISTE) Faccio il limite sulle rette. CIOÈ prendo $m \in \mathbb{R}$ ($m \neq 1$) e mi metto sulla retta $\{y = mx\}$. Questa è contenuta in quanto detto sopra se considero $\gamma(t) = (t, mt)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\gamma(x) = (x, mx)$





se $t = 0$ $\gamma(0) = (0,0)$

se $t \neq 0$ $\gamma(t) \neq (0,0)$

DUNQUE se $\underbrace{f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \ell}$ $\Longrightarrow$ $f(t,mt) \xrightarrow{t\to 0} \ell$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+mt)}{t-mt} = \ell$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+mx)}{x-mx} = \ell\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin((m+1)t)}{t(1-m)} = \frac{m+1}{1-m}$$

← Hôpital

← DIPENDE DA m

↑ limite in UNA VARIABILE

[Posso anche considerare la retta verticale $x=0$ usando $\gamma(t) = (0,t)$]

- per esempio se $m = 0$ ho 1 $\quad \left(\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1\right)$
- se $m = -1$ ho 0 $\quad \left(\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x-x)}{x+x} = 0\right)$

DUNQUE IL <u>LIMITE NON ESISTE</u>

COMMENTO Se avessi trovato un risultato indipendente da m (per esempio zero), avrei individuato il candidato limite ma non potrei dedurre che effettivamente $f(x) \to \ell$

$$\boxed{\text{PAUSA FINO ALLE 18.25}}$$

Altro esempio

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} = ??$$

Anche qui $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ ($\mathbb{R}^2$ meno la diagonale)

$X_0 = (0,0)$ di acc. per A $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}$ (se $x \neq y$)

Come prima cerco di capire cosa fa f sulle rette $\simeq$

dato $m \neq 1$ mi chiedo se esiste $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - m^2x^2)}{x - mx} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2-m^2x^2)\, 2x \overbrace{(1-m^2)}^{(1+m)(1-m)}}{1-m} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2-m^2x^2)\, 2x\,(1+m)}{1} = 0 \leftarrow \text{INDIPENDENTE DA } m.$$

DUNQUE PUO' ESISTERE limite $\ell = 0$. Mi chiedo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} = 0 \quad ??$$

MODO (I) usando la maggiorazione $|\sin(t)| \leq t$

Allora $0 \leq \left| \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} \right| \leq \left| \dfrac{x^2-y^2}{x-y} \right| = |x+y| \leq \underbrace{|x|+|y|}_{\|(x,y)\|_1} \leq 2(x^2+y^2)^{1/2}$

(dalle disuguaglianze) $= 2\|(x,y)\|$

POSSO DIRE CHE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\| = 0 \quad \text{(dovrei applicare la def. ....)}$$

DUNQUE

$$0 \le \left| \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} \right| \le 2\|(x,y)\|$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} \right| \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y} = 0$$

(in generale $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$
$\Updownarrow$
$\|f(x)\| \to 0$ per $x \to x_0$

MODO (2)

$$\frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} = \left(\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\right)(x+y) = 0$$

$\approx$

$\frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2} \to 1$, $(x+y) \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin t}{t} \Big|_{t=x^2-y^2} \right) =$$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ USO IL TEOREMA DI COMPOSIZIONE CON

$g(x,y) = x^2-y^2$ $\qquad f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$

(se $x^2-y^2 \neq 0$ cioè $x \neq y$ e devo togliere a parte il caso $x=-y$)

POI HO ANCHE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

lo deduco dal seguente esercizio

Continuazione delle proprietà

(K) Se $f : A \to X_1$ $\quad X_1 = \mathbb{R}^M$, dunque

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_M(x))$$

Allora $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}^M \Longleftrightarrow$ ogni componente di f tende alla componente di ℓ

CIOÈ

$$f_i(x) \to \ell_i \qquad (\ell = (\ell_1, \dots, \ell_M))$$
$$i = 1 \dots M$$

(L) Se $X = \mathbb{R}^N$ posso chiamare "proiezione" sull'asse i

$$\pi_i(x) = f(x_1, \dots, x_N) = x_i .$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \pi_i(x) = \pi_i(x_0)$$

$$\left(\text{in } \mathbb{R}^2 \text{ è quello detto sopra} \quad \begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x &= x_0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y &= y_0 \end{aligned} \right)$$

<u>Ancora un esempio</u>

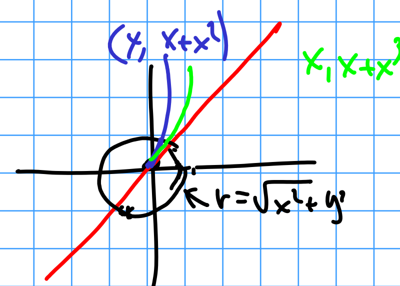
$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x-y}}^{f(x,y)}}_{\text{esiste ??}} \qquad (\text{sempre lo stesso } A,\ x_0 = (0,0))$$

<u>Proviamo sulle rette</u>. Fisso $m \neq 1$ e provo a fare

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2 + m^2 x^2)}{x - mx} \overset{\text{Hôpital}}{=} 0$$

Dunque mi devo chiedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x-y} = 0$$



Se guardo bene mi rendo conto che trovo delle coppie (x,y) con $x \neq y$

ma con $x-y$ molto più piccolo di x^2+y^2 $\longrightarrow$ la funzione esplode

IN EFFETTI posso PRENDERE $(x, \underbrace{x+x^2}_{y=x+x^2=g(x)})$ ← CURVA BLU

$$\lim_{x\to 0} f(x, x+x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+(x+x^2)^2)}{-x^2} \overset{\text{Hôpital}}{=} -2$$

$$\simeq \frac{x^2+(x+x^2)^2}{-x^2} = \frac{x^2+x^2(1+x)^2}{-x^2} = \frac{1+(1+x)^2}{-1} \to -2$$

SULLE RETTE $\longrightarrow 0$ / sulla curva blu $\longrightarrow -2$

$\Downarrow$

il limite NON ESISTE

curva verde

si può vedere che $\lim_{x\to 0} f(x, x+x^3) = -\infty$