Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 05 06/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Esempi di norme differenti. In $X = \mathbb{R}^N$; $P = (x_1, \dots, x_N)$

definisco
$$\|P\|_1 = |x_1| + \dots + |x_N|$$
$$\|P\|_2 = \left(|x_1|^2 + \dots + |x_N|^2\right)^{1/2} \qquad \left(\|P\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_N|^p\right)^{1/p} \right)$$
$$\|P\|_\infty = \max\left(|x_1|, \dots, |x_N|\right)$$

Si vede che sono tutte delle norme.

Vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$(*) \quad \boxed{\|P\|_\infty \le \|P\|_2 \le \|P\|_1 \le N \|P\|_\infty}$$

- $\|P\|_\infty \le \|P\|_2$. Se prendo $i = 1 \dots N$

$$|x_i| \le \left(x_i^2\right)^{1/2} \le \left(x_1^2 + \dots + x_N^2\right)^{1/2} = \|P\|_2$$

$$\Rightarrow \quad \|P\|_\infty = \max_{i=1 \dots N} |x_i| \le \|P\|_2$$

- $\|P\|_\infty \le \|P\|_1$. Come sopra, se $i = 1 \dots N$

$$|x_i| \le |x_1| + \dots + |x_N| = \|P\|_1$$

$$\Rightarrow \quad \|P\|_\infty = \max_{i=1 \dots N} |x_i| \le \|P\|_1$$

- $\|P\|_2^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_N|^2 \le \|P\|_\infty |x_1| + \dots + \|P\|_\infty |x_N| =$

$$\|P\|_\infty\left(|x_1|+\dots+|x_N|\right) = \|P\|_\infty \|P\|_1 \le \|P\|_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \|P\|_2 \le \|P\|_1$$

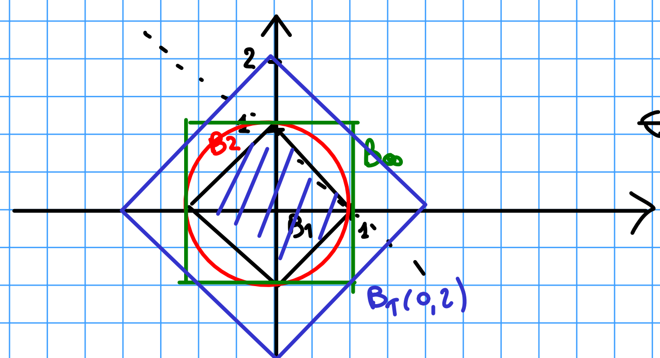
- $\|P\|_1 = |x_1|+\dots+|x_N| \le \|P\|_\infty + \dots + \|P\|_\infty = N\|P\|_\infty$

Se ora indico con $B_1(P_0,R)\,/\,B_2(P_0,R)\,/\,B_\infty(P_0,R)$ per indicare le palle di centro P_0 e raggio R in $\|\ \|_1 / \|\ \|_2 / \|\ \|_\infty$ da (★) ottengo:

$$(★★) \quad \underbrace{B_1(P_0,R) \subset B_2(P_0,R)}_{(\bullet)} \subset B_\infty(P_0,R) \subset B_1(P_0,NR)$$

$(\bullet)$ lo dimostro così: se $P \in B_1(P_0,R) \iff$
$\|P-P_0\|_1 < R \Rightarrow \|P-P_0\|_2 \le \|P-P_0\|_1 < R$
$\Rightarrow P \in B_2(P_0,R)$ HO DIM. $(\bullet)$

VEDIAMO COME SONO FATTE $B_j(0,1)$ $\quad j=1,2,\infty$



← TORNA CON LA (★★)

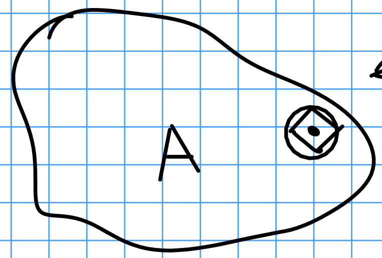
$B_1(0,1) = \{|x|+|y|<1\}$ $\qquad B_1(0,1)\cap\{x\ge 0, y\ge 0\} = \{x\ge 0, y\ge 0\ \ x+y<1\}$

$B_2(0,1) = \{x^2+y^2<1\}$

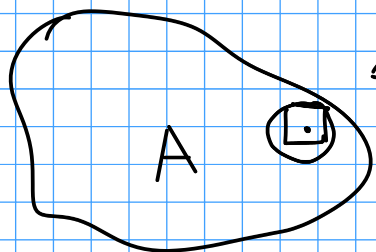
$B_\infty(0,1) = \{\max(|x|,|y|)<1\} = \{|x|<1,\ |y|<1\}$

$B_1(0,2)$

<u>OSS.</u> Nel caso di $X = \mathbb{R}^N$ tutte le definizioni di pto interno / esterno / di frontiera: danno gli stessi risultati se si usa una qualunque di queste norme A CAUSA DI (★★)



palla rispetto alla norma (euclidea) 2



deve essere $B_\infty(P_0, R/2) \subset B_2(P_0, R)$

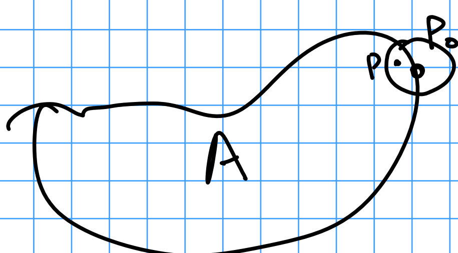
$\mathbb{X}$ spazio vettoriale con una norma $\| \ \|$

($\mathbb{X}_1$ " " " " " $\| \ \|_1$)

Nozioni di LIMITE

Def. Se $A \subset \mathbb{X}$ e $P_0 \in \mathbb{X}$ dico che P_0 è di ACCUMULAZIONE per l'insieme A se

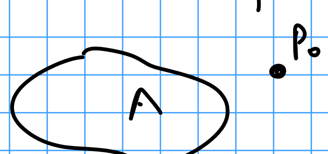
$$\forall r > 0 \ \exists P \text{ tale che } P \in B(P_0, r), \ P \in A, \ P \neq P_0$$



≃ VICINO A P_0 ci sono punti di A diversi da P_0

SE $P_0 \in A$, NON È DI ACC. per A dico che P_0 è ISOLATO

$\iff$ $P_0 \in A$, $\exists\, r > 0$ tale che $B(P_0, r) \cap A = \{P_0\}$



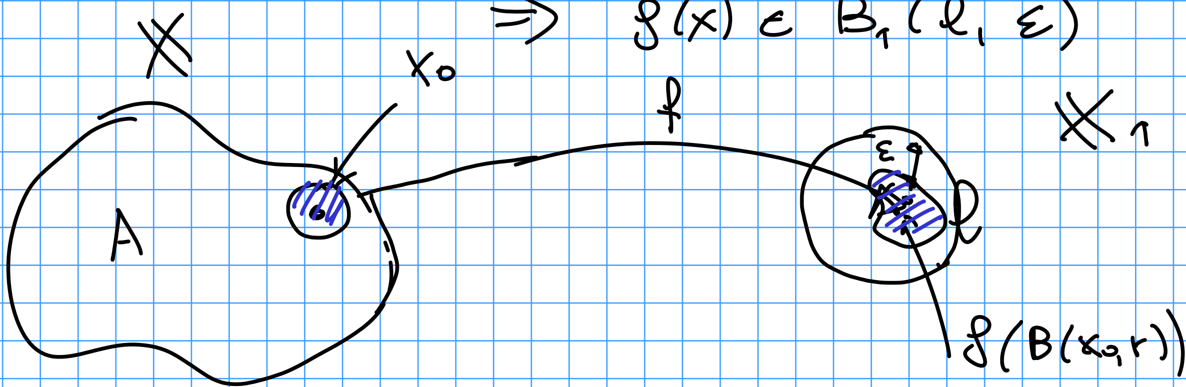
Def. (LIMITE) $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ e $(\mathbb{X}_1, \|\cdot\|_1)$ spazi normati

$A \subset \mathbb{X}$ $\exists\, \mathbf{x}_0$ di accumulazione per A, $f : A \to \mathbb{X}_1$

$\ell \in \mathbb{X}_1$. Dico che ℓ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 x

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0$ tale che $\overbrace{\forall x \in B(x_0, r),\ x \in A,\ x \neq x_0}^{\text{ci sono dei tali } x}$

$\Rightarrow \quad f(x) \in B_1(\ell, \varepsilon)$



Il fatto che x_0 è di occ. mi garantisco che ci sono punti in $B(x_0, r) \cap A$ diversi da x

SCRIVO $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad / \quad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$

(x x_0 è mt abbiamo $f(x) \to \ell$)

Nota la def di Analisi 1 è un caso particolare in cui

$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 = \mathbb{R} \qquad \|x\| = |x|$

PROPRIETÀ del limite (Enunciate senza dim.)

($f, g : A \to \mathbb{X}_1$ $\quad A \subset \mathbb{X}$ $\quad x_0$ pto di occ. per A)

(A) · (UNICITÀ DEL LIMITE)

se $f(x) \to \ell_1$ e $f(x) \to \ell_2$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

(B) · (LINEARITÀ)

se $f(x) \to \ell_1 \quad g(x) \to \ell_2 \quad (x \to x_0)$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) \to \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2$

(C) · (PRODOTTO) se $f(x) \to \ell$ e se $g(x) \to \lambda \in \mathbb{R}$ con $g : A \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad g(x) f(x) \to \lambda \ell$

- (PROD. SCALARE) se è def. in $\mathbb{X}$ un prodotto scalare che induce la norma

(D) $$f(x) \to \ell_1 \quad g(x) \to \ell_2 \Rightarrow \underset{(x \to x_0)}{(f(x), g(x))} \to (\ell_1, \ell_2)$$

- (E) Se C è un insieme chiuso in $\mathbb{X}_1$ e se

$$f(x) \in C \quad \forall x \in A, \; f(x) \underset{x \to x_0}{\to} \ell \Rightarrow \ell \in C$$

- (F) Se $F \subset \mathbb{X}_1$ è un aperto, e $f(x) \overset{x \to x_0}{\to} \ell \in F$

$\Rightarrow \quad f(x) \in F$ quando x è abbastanza vicino a x_0

CIOÈ $\exists\, r>0$ tale che $x \in B(x_0, r), x \in A, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in F$

- Per esempio se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e so che

$$\|f(x)\| \leq 1 \Rightarrow \|\lim_{x \to x_0} f(x)\| \leq 1$$

- Se $f(x) \to \ell$ e $\|\ell\| < 1$ allora $\|f(x)\| < 1$ per x vicino a x_0

OSS. Se $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}$ ① da (F) deduco il teorema di permanenza del segno.

$$f: A(\subset \mathbb{X}) \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) > 0$$

$\Rightarrow f(x) > 0$ per $x \in B(x_0, r)$ r opportuno

② da (E) deduco:

$$\text{Se } f(x) \geq 0 \;\; \forall x \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$$

INFATTI $\{\ell > 0\}$ è aperto in $\mathbb{R}$

$\{\ell \geq 0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$

#