Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 04 05/10/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

NOZIONE DI NORMA. $\mathbb{X}$ spazio vettoriale

Chiamo $\boxed{\text{NORMA}}$ su $\mathbb{X}$ una qualunque funzione $n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

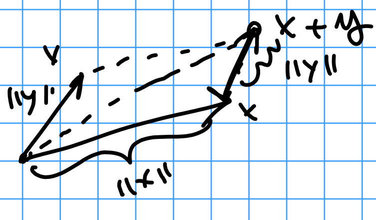
(a) $n(x) \geq 0$ e $n(x) = 0 \iff x = 0$ (in $\mathbb{X}$)

(b) $n(tx) = |t|\, n(x) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{X}$ $\qquad \|x\| = \|-x\|$ usando $t = -1$

(c) (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

$$n(x+y) \leq n(x) + n(y)$$

Di solito indico con $\|x\|$ la norma di x (invece di $n(x)$)

(c) $\to$ 

= la lunghezza di un lato del triangolo è minore della somma delle lunghezze degli altri due

Def Dati x e y in $\mathbb{X}$ (con norma $\|\cdot\|$) chiamo DISTANZA TRA x e y (rispetto a $\|\cdot\|$) la

$$d(x,y) := \|x - y\| = \|y - x\|$$

OSS. Se in $\mathbb{X}$ c'è un prodotto scalare $\Rightarrow$ automaticamente ho una norma (indotta) $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Def. Dico che $\mathbb{X}$ è NORMATO se in $\mathbb{X}$ c'è una norma

In $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ c'è la norma canonica $\|(x_1, \dots, x_N)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ che è indotta dal prodotto scalare canonico

$$\Big((x_1, \dots, x_N) \cdot (y_1, \dots, y_N)\Big) := x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$$

OSS. Non è sempre detto che una norma sia indotta da un prodotto scalare (lo vediamo fra un momento)

ESEMPI IN $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ (anche in $\mathbb{R}^N \dots$). Sia $P = (x, y)$

$$\|P\|_1 = |x| + |y|$$

$$\|P\|_2 = \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{1/2} \quad \text{(è la norma canonica)}$$

più in generale se $p \geq 1$ $\quad \|P\|_p = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p}$

e poi $\|P\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

Si può vedere che sono tutte delle norme. Mostriamo che $\boxed{\|\cdot\|_\infty}$ è una norma: la proprietà "complicata" è la (c)

Siano $P = (x, y)$ $\quad Q = (x', y')$

$$\|P + Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty \quad ?!$$

$$\Big[\max\left(|x + x'|, |y + y'|\right) \leq \max\left(|x|, |y|\right) + \max\left(|x'|, |y'|\right)\Big]$$

so che $|x + x'| \leq |x| + |x'|$ e $|y + y'| \leq |y| + |y'|$

$$\Rightarrow \quad |x + x'| \leq \underbrace{\max(|x|, |y|)}_{\geq |x|} + \underbrace{\max(|x'|, |y'|)}_{\geq |x'|} = \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

$$\text{e} \quad |y + y'| \leq \underbrace{\max(|x|, |y|)}_{\geq |y|} + \underbrace{\max(|x'|, |y'|)}_{\geq |y'|} = \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

e dunque $\underbrace{\max(|x+x'|, |y+y'|)}_{\|P+Q\|_\infty} \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$

#

Dunque $\|\ \|_\infty$ <u>è una norma</u>. In modo simile si dimostra che $\|\cdot\|_1$ è una norma

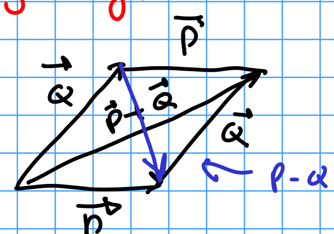
So $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ e $\|\ \|_\infty$ sono delle norme.

<u>VEDIAMO</u> che $\|\ \|_1$ NON PROVIENE DA UN PRODOTTO SCALARE. Per questo si può notare che, quando $\|\ \|$ proviene da un prodotto scalare $(\ ,\ )$ $\Rightarrow$

$$\|P+Q\|^2 + \|P-Q\|^2 = \|P\|^2 + (P,Q) + \|Q\|^2 + \|P\|^2 - (P,Q) + \|Q\|^2 = 2\|P\|^2 + 2\|Q\|^2$$

(★) $$\boxed{\|\vec{P}+\vec{Q}\|^2 + \|\vec{P}-\vec{Q}\|^2 = 2\|\vec{P}\|^2 + 2\|\vec{Q}\|^2}$$

(eguaglianza del parallelogramma)



VEDIAMO CHE (★) non vale per $\|\ \|_1$ (e neanche per $\|\ \|_\infty$)

Per esempio prendo $P = (1,0)$ $Q = (0,1)$

$P+Q = (1,1)$ $P-Q = (1,-1)$

$\|P\|_1 = |1| + |0| = 1$ $\|Q\|_1 = |0| + |-1| = 1$

$\|P+Q\|_1 = |1| + |1| = 2$ $\|P-Q\| = |1| + |-1| = 2$

$$\|P+Q\|_1^2 + \|P-Q\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 2\|P\|_1^2 + 2\|Q\|_1^2 = 4$$

(provate con $\|\ \|_\infty$ — NON TORNA NEANCHE LEI)

LEGAME tra queste norme: se $P\in\mathbb{R}^2$ $\quad P=(x,y)$

$$\|P\|_\infty \le \|P\|_2 \le \|P\|_1 \le 2\|P\|_\infty$$

Infatti: (1) $\max(|x|,|y|)^2 \le |x|^2+|y|^2$

$\|P\|_\infty^2 \le \|P\|_2^2$ (faccio la radice..)

(2) $\|P\|_\infty \le \|P\|_1$. Come in (1) vedo che

$$\|P\|_\infty = \max(|x|,|y|) \le |x|+|y| = \|P\|_1$$

(3) $\|P\|_2^2 = x^2+y^2 \le \max(|x|,|y|)|x| + \max(|x|,|y|)|y|$

$= \|P\|_\infty(|x|+|y|) = \|P\|_\infty\|P\|_1 \le \|P\|_2\|P\|_1$

$\Rightarrow \|P\|_2^{\cancel{2}} \le \cancel{\|P\|_2}\|P\|_1 \Rightarrow \|P\|_2 \le \|P\|_1$

(3) $\|P\|_1 = |x|+|y| \le \max(|x|,|y|)+\max(|x|,|y|) = 2\|P\|_\infty$

Def. Dato X con una norma $\|\cdot\|$. Chiamo disco (o palla) di centro $P_0\in X$ e raggio $R>0$ l'insieme

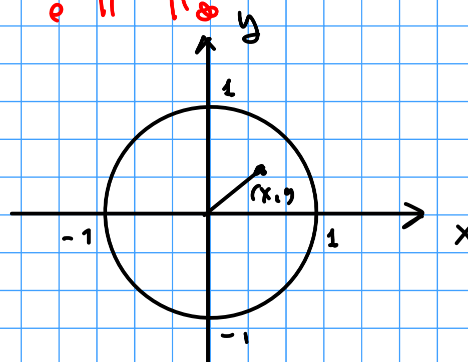
$$B(P_0,R) := \{P\in X : \|P-P_0\| < R\}$$

(i punti in cui $\|P-P_0\|=R$ non sono in $B(P_0,R)$)

Vediamo - per esempio - come sono fatti $B(0,1)$ quando si considerano su $\mathbb{R}^2$ le norme di prima

INDICO CON $B_1(0,1)$ $B_2(0,1)$ $B_\infty(0,1)$ i miei dischi rispetto a $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ e $\|\ \|_\infty$

CASO della $\|\ \|_2$



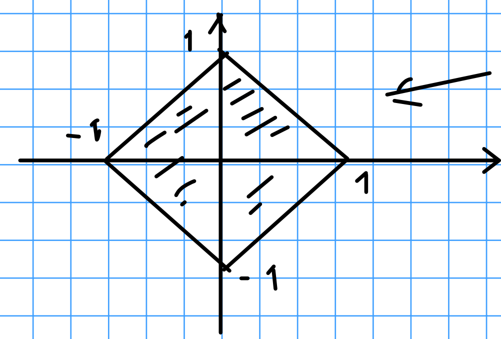
OSS. la norma 2 si dice anche NORMA EUCLIDEA

CASO DI $\| \ \|_1$

$$B_1((0,0),1) = \{(x,y) : |x|+|y|<1\}$$

Vediamo $B_1 \cap \{x\ge 0, y\ge 0\} = \{(x,y) \ \ x\ge 0, y\ge 0 \ \ x+y<1\}$

AGGIUNGO GLI ALTRI QUADRANTI

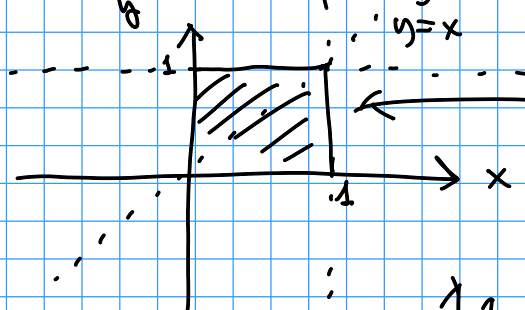


$B_1(0,1)$ è "palla" di centro $(0,0)$ e raggio 1 in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$

CASO DI $\| \ \|_\infty$

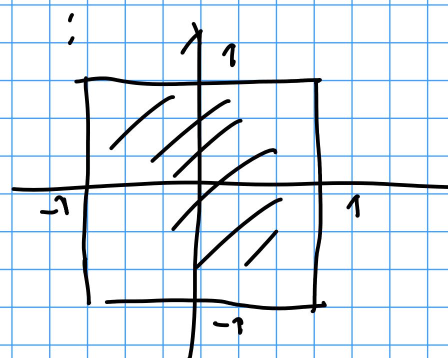
$$B_\infty((0,0),1) = \{(x,y) : \max(|x|,|y|)<1\}$$

$B_\infty \cap \{\text{primo quadrante}\} = \{(x,y) \ \ x\ge 0, \ y\ge 0, \ \max(x,y)<1\}$



$B_\infty \cap \{\text{primo quadrante}\}$

$\Rightarrow \quad B_\infty(0,1) =$

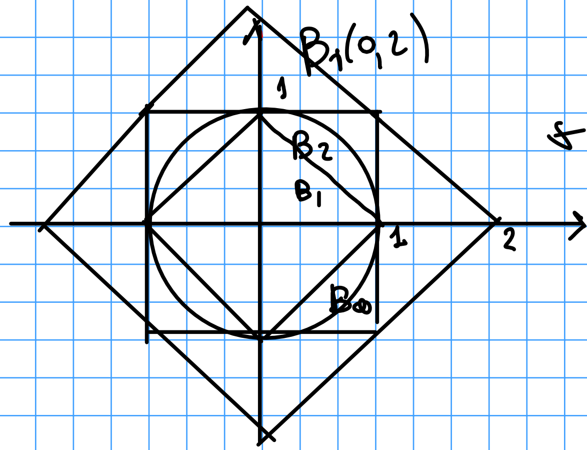


OSS. Dalle disuguaglianze tra le norme si ricava

$$(\otimes) \qquad B_1(P_0,R) \subset B_2(P_0,R) \subset B_\infty(P_0,R) \subset B_1(P_0,2R)$$

per esempio: se $P \in B_1 \Leftrightarrow \|P-P_0\|_1 < R \Rightarrow \|P-P_0\|_2 \le \|P-P_0\|_1 < R$

$\Rightarrow P \in B_2$

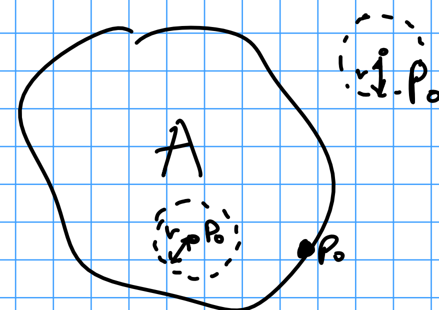


$\not\exists$ ⊛

Nel seguito abbiamo $\mathbb{X}$ spazio vettoriale con una norma $\| \, \|$
(pensate a $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N - \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^3$, e $\|P\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$))

$$\left(dist(P, Q) = \|P - Q\| \right)$$

<u>Def.</u> Sia $\underset{(\text{insieme})}{A} \subset \mathbb{X}$ e sia $\underset{(\text{punto})}{P_0} \in \mathbb{X}$



- Dico che P_0 è $\boxed{\text{INTERNO}}$ AD A
  se esiste $r > 0$ tale che $B(P_0, r) \subset A$

- Dico che P_0 è <u>ESTERNO</u> AD A
  se esiste $r > 0$ tale che $B(P_0, r) \cap A = \emptyset$

- Dico che P_0 è <u>DI FRONTIERA</u> se P_0 non è né interno né esterno

<u>OSS.</u> P_0 è di frontiera $\Longleftrightarrow$ $\forall r > 0$ esistono P', P''
tali che $P', P'' \in B(P_0, r)$ $P' \in A$ $P'' \notin A$

(P' e P'' possono coincidere con P_0)

<u>OSS.</u> P_0 è esterno $\Longleftrightarrow$ P_0 è interno a $\complement A$ = complementare
di $A = \{ x \in \mathbb{X} : x \notin A \}$

P_0 è di frontiera per $A \Longleftrightarrow P_0$ è di frontiera per $\complement A$

Def. Dato $A \subset X$, chiamo

<u>PARTE INTERNA DI A</u> l'insieme $\mathring{A}$ = {punti interni ad A}

<u>PARTE ESTERNA DI A</u> " " {PUNTI ESTERNI AD A}

$= \mathring{(\complement A)}$

<u>FRONTIERA DI A</u> l'insieme ∂A = {pti di frontiera per A}

SI VEDE DALLE DEFINIZIONI CHE

- $X = \mathring{A} \cup \partial A \cup \mathring{(\complement A)}$
- $\partial A = \partial \complement A$

Def. $A \subset X$ la <u>CHIUSURA</u> di A è $\mathring{A} \cup \partial A$

Def. Dato $A \subset X$ dico che

- A è <u>APERTO</u> quando $A = \mathring{A}$ (tutti i punti di A sono interni ad A)
- A è <u>CHIUSO</u> quando $A = \bar{A}$ $(= \underbrace{\mathring{A} \cup \partial A}_{\text{disgiunti}})$

PAUSA FINO ALLE <u>16.25</u>

Proprietà

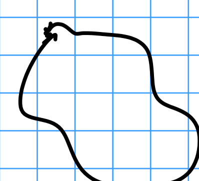
(a) $\underbrace{\mathring{A} \subset A}_{\text{facile}} \underbrace{\subset \bar{A}}_{}$

perché se $P \in \bar{A} \Rightarrow P$ è esterno $\Rightarrow P \notin A$

ne segue che:

(b) $\bar{A} = A \cup \partial A$

(c) A è chiuso $\Leftrightarrow \partial A \subset A$

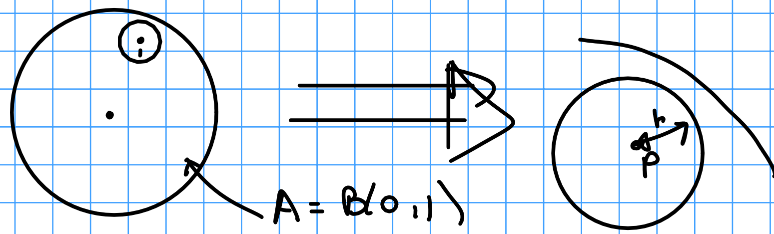


(d) A è aperto $\Leftrightarrow \complement A$ è chiuso

$\Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$

ESEMPIO IN $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidea, $A = B((0,0),1)$

$= \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$



(1) A è aperto

(2) $\partial A = S \left(= S(0,1)\right) = \{ (x,y) : x^2+y^2 = 1 \}$ $\left(\Rightarrow \bar{A} = \{ x^2+y^2 \leq 1 \} \right)$

<u>Dim.</u> (1) Sia $P \in A$, cioè $\|P\| < 1$.

Sia $r = \dfrac{1-\|P\|}{2} > 0$. <u>MOSTRIAMO</u> CHE $B(P,r) \subset \underset{B(0,1)}{\overset{}{A}}$

per questo considero $P' \in B(P,r)$. Allora

$$\|P'\| = \|P'-P+P\| \leq \|P'-P\| + \|P\| < r + \|P\| =$$

$$\frac{1-\|P\|}{2} + \|P\| = \frac{1+\|P\|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1 \Rightarrow \|P'\| < 1$$

HO VERIFICATO CHE: se $P' \in B(P,r) \Rightarrow \|P'\| < 1 \Leftrightarrow P' \in A$

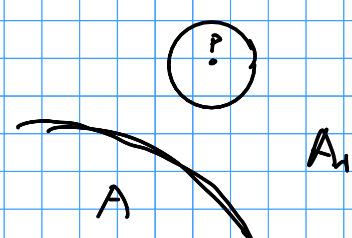
cioè $B(P,r) \subset A$!!.

Dato che lo posso fare $\forall P \in A \Rightarrow A$ è aperto

(2') Mostro che l'insieme $\{ x^2+y^2 > 1 \} = A_1 = \{P : \|P\| > 1\}$ è aperto anche lui

Simile a (1). Sia $P \in A_1$. Poniamo $r = \dfrac{\|P\|-1}{2}$

dico che $B(P,r) \subset A_1$



$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

IN EFFETTI SE $P' \in B(P,r) \Rightarrow$

$$\|P\| = \|P-P'+P'\| \leq \|P-P'\| + \|P'\| < r + \|P'\|$$

$$= \frac{\|P\|-1}{2} + \|P'\| \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1+\|P\|}{2}}_{>1} < \|P'\|$$

DUNQUE se $P' \in B(P,r) \Rightarrow \|P\|' > 1$ cioè $P' \in A_1$

A_1 è aperto

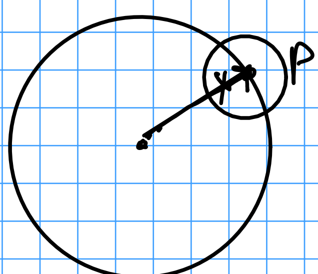
- Da (2') segue che i punti di A_1 sono <u>esterni</u> ad A

MA ALLORA
- i punti di A sono interni, $\Rightarrow$
- i punti di A_1 sono esterni

∂A non interseca né A né A_1, cioè $\partial A \subset \{x^2+y^2=1\}$

$$\boxed{\partial A \subset S}$$

- DIMOSTRIAMO che $S \subset \partial A$, cioè che ogni punto P con $\|P\|=1$ è di frontiera per A



- $P \notin A$
- Se $0 \leq t < 1$ $tP \in A$ perché $\|tP\| = |t|\,\|P\| = t < 1$

MA $\|tP - P\| = |t-1|\,\|P\| = 1-t$

Allora dato $r>0$ scelgo $t = 1-\frac{r}{2} \Rightarrow$

$\|tP-P\| = 1-t = \frac{r}{2} < r \Rightarrow tP \in B(P,r)$

<u>DUNQUE</u> dato $r>0$ trovo $P' = tP \in B(P,r) \cap A$
$P'' = P \in B(P,r) \cap \complement A$

$\rightsquigarrow$ P è di frontiera

In generale in $\boxed{X \text{ normato}}$

$B(P_0,R)$ è aperto, $\partial B(P_0,R) = S(P_0,R)$

dove $S(P_0, R) := \{ P : \|P - P_0\| = R \}$

(sfera di centro P_0 e raggio R)

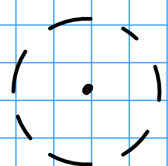
$$\Rightarrow \overline{B(P_0, R)} = \{ P : \|P - P_0\| \le R \}$$

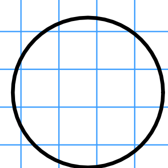
<u>OSS.</u> Dalla $(2')$ fatto sopra si vede che $\complement\, \overline{B(P_0,R)}$ $(= A_1)$ è aperto. QUESTO IMPLICA (controllare!!) che $\partial\, \overline{B(P_0, R)} = S(P_0, R)$

QUESTO NON È OVVIO. NON È SEMPRE VERO CHE

$$\partial A = \partial \overline{A}.$$

Per esempio se $A = \{ 0 < x^2 + y^2 < 1 \} = \{ 0 < \|P\| < 1 \}$

$A =$  $\partial A = S(0,1) \cup \{(0,0)\}$

$\overline{A} =$  $\partial \overline{A} = S(0,1)$

(si può dim che $\partial \overline{A} \subset \partial A$, ma possono essere $\neq$)