Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 03 30/09/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Forma quadratica: $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{X}$ spazio vett. (di dim $< +\infty$) $\phi(u) = Q(u,u)$

e bilineare. Nel caso di $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ $u =$

$$\phi(u) = u^t A u \quad \text{con } A \text{ matrice simmetrica}$$

Ci interessa sapere se ϕ è

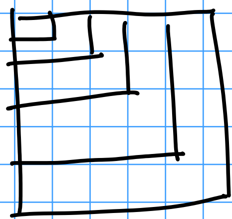
- positiva $(A \geq 0)$ $\phi(u) \geq 0$ $\forall u \in \mathbb{X}$
- strett. positiva $(A > 0)$ $\phi(u) > 0$ $\forall u \in \mathbb{X}$ $u \neq 0$

CRITERIO DI SYLVESTER

(a) $A \geq 0 \iff$ tutti i minori principali di A hanno determinante ≥ 0

(b) $A > 0 \iff$ tutti i minori principali dominanti di A hanno determinante > 0

MINORI PRINCIPALI DOMINANTI: si ottengono da A cancellando le ultime k righe e k colonne, $k = 0, 1 \dots N-1$



Se A è 3×3

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = A \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}, \qquad [a]$$

Per esempio vediamo se la forma quadratica:

$$\phi(x,y,z) = -3x^2 + y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}\,xz$$

vediamo se $\phi > 0$, ϕ è ottenuta mediante la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Proviamo ad applicare Sylvester: devo calcolare <u>tre</u> determinanti

$$\det\begin{bmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det[-3]$$

$$\boxed{-3 < 0} \qquad \boxed{-3 < 0}$$

$$\| $$

$$1 \cdot \det\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} = 6 - 2 = \boxed{4 > 0}$$

A NON È ≥ 0 $\qquad$ A non è neanche ≤ 0

perché se fosse $A \leq 0 \iff -A \geq 0$

quindi il criterio di sopra ci dice anche:

(c) $A \leq 0 \iff (-A \geq 0 \iff) \iff (-1)^k \det A' \geq 0$

per ogni A' minore principale di dim k

→ (d) $A < 0 \iff (-1)^k \det A' \geq 0$ $\forall A'$ minore principale dominante di dim k

$\left(\det(-A) = (-1)^n \det A \quad \text{dove } n = \text{dimensione di } A \right)$

IN UNA MATRICE 3×3 la condizione (d) si legge:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A \leq 0 \iff \det A < 0 \ , \ \det \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} > 0 \ , \quad a < 0$$

se guardo il caso di prima, vedo che A non è < 0

<u>DUNQUE</u> la matrice che stavamo esaminando ha sia autovalori > 0 che autovalori < 0 (ma ha autovalore 0 perché $\det A = 4 \neq 0$)

Per curiosità vediamo se riusciamo a calcolare gli autovalori. Faccio il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)\left((3+\lambda)(2+\lambda) - 2\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 4)$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \iff \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

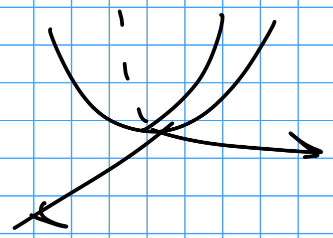
$$p(\lambda) \ (1-\lambda)(1+\lambda)(4+\lambda)$$

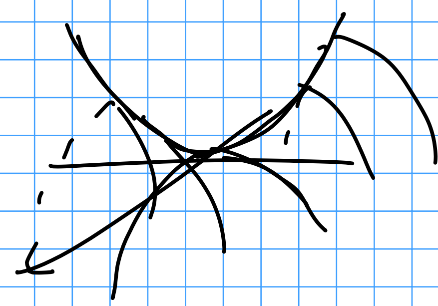
$$\underbrace{\lambda_1 = 1}_{>0} \quad \underbrace{\lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -4}_{<0}$$

Si usa dire che la forma (o la matrice) è <u>INDEFINITA</u>

$\simeq$ la forma ha un "comportamento di sella"

IDEA $\Phi > 0$ $\Phi < 0$ Φ INDEFINITA





(mancano i casi con qualche autovalore nullo).

ALTRO ESEMPIO

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$$

Φ è associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(anche $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ andrebbe bene MA NON SAREBBE SIMMETRICA)

Applichiamo Sylvester ad A!

- $\det A = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \left(1 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)$

  $1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

- $\det \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$

- $\det [1] = 1 > 0$

LA FORMA È DEFINITA STRETTAM. POSITIVA

NOTA se considero $-\Phi$ trovo la matrice $-A$

$$\det(-A) = (-1)^3 \det A = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} = (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\det[-1] = -1 < 0$$

e segni alterni ! $-\phi$ è def. <0

Anche in questo caso cerco gli autovalori
(COME VERIFICA: devo trovare tre autovalori >0)

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & (1-\lambda) & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & (1-\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^3 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}(1-\lambda) + \frac{1}{4}(1-\lambda) + \frac{1}{4}(1-\lambda) \right) =$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\lambda =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{4}\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3$$

MI ACCORGO CHE 2 è radice di $p(\lambda)$

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 12 - 8 = -4 + 12 - 8 = 0$$

Divido $p(\lambda)$ per $(\lambda - 2)$

	-1	$+3$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$
2		-2	2	$-\frac{1}{2}$
	-1	1	$-\frac{1}{4}$	0

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)\left(-\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{4}\right) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1/2)^2$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 1}}{-2} = \frac{1}{2} \text{ (doppia)}$$

GLI AUTOVALORI SONO $\lambda = 2$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ (DOPPIO)

COMUNQUE CI SONO TRE AUTOV. INDIP. PERCHÉ A È SIMMETRICA ← $m_A(2) = 1$ $m_A\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

RICORDIAMO Se $\bar{\lambda}$ è un autovalore per la matrice A $(N \times N)$
$\Leftrightarrow$ $\bar{\lambda}$ è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$

- CHIAMO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $m_A(\bar{\lambda})$ di $\bar{\lambda}$ quel numero intero $m \geq 1$ tale che $p(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda})^m p_1(\lambda)$
con $p_1(\bar{\lambda}) \neq 0$

(la molteplicità di $\bar{\lambda}$ come radice di p)

- CHIAMO MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA $m_G(\bar{\lambda})$

la dimensione del $\mathrm{Ker}(A - \bar{\lambda} I)$, cioè il MAX numero di autovettori rispetto a $\bar{\lambda}$ linearmente indip.

$$1 \leq m_G(\bar{\lambda}) \leq m_A(\bar{\lambda})$$

- Se A ha tutti autovalori distinti allora $\forall \bar{\lambda}$ autovalore
$$m_G(\bar{\lambda}) = m_A(\bar{\lambda}) = 1$$

- Se A non ha N autovalori distinti $\Rightarrow$
ci sono autovalori con $m_A > 1$
(la somma delle m_A deve fare N)

e PUÒ SUCCEDERE che $m_G < m_A$
(in questo caso NON TROVO UNA BASE DI AUTOVETTORI $\to$
A non è diagonalizzabile)

- Se PERÒ A è simmetrica $\Rightarrow$ PER OGNI $\bar{\lambda}$ autovalore di
ho $m_A(\bar{\lambda}) = m_G(\bar{\lambda})$

NOTA Se A è simmetrica $\Phi(u) = u^t A u$
Se $\lambda_1 \dots \lambda_N$ sono gli autovalori (EVENTUALMENTE RIPETUTI A SECONDA DELLA MOLTEPLICITÀ)

e $e_1 \dots e_N$ CORRISPONDENTI AUTOVETTORI

Allora se mi metto nella base $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ la forma ϕ si scrive

$$\phi(u) = [u]_{\mathcal{B}}^t \, \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) \, [u]_{\mathcal{B}}$$

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

. CIOÈ se $[u]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots x_N)$

$$\phi(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_N x_N^2$$

#

PAUSA $\longrightarrow$ 18.30

Se A è $N \times N$ definisco $A^1 \; A^2 \dots A^N = A$

$A^1 = [a_{11}]$, $A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \dots$ (MINORI DOMINANTI)

(c) $A > 0$ se $\det A^i > 0 \quad i = 1 \dots N$

(d) $A < 0$ se $(-1)^i \det A^i > 0 \iff$

$\det A^1 < 0, \; \det A^2 > 0, \; \det A^3 < 0 \dots$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

MINORI DOMINANTI $A = A^2$, $[0] = A^1$

$\det A = 0 \quad \det A^1 = 0$

NON POSSONO BASTARE A DIRMI CHE $A \geq 0$

MINORI PRINCIPALI A, $[0]$, $[-1]$

$A \to \det = 0$, $[0] \to \det = 0$, $[-1]$: $\det = -1$

$A \leq 0$ perché : minori di ordine pari (la sola A) $\to \det \geq 0$

" " " " dispari $([0], [-1]) \to \det \leq 0$

La forma quadratica in questo caso è $\phi(x,y) = -y^2$

PRODOTTI SCALARI

Dato uno spazio vett. X, chiamo PRODOTTO SCALARE

$u, v \to (u, v)$ $\quad$ (o $u \cdot v$)

· bilineare, simmetrico, positivo strett.

$$① \begin{cases} (u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \\ (u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2) \\ (\lambda u, v) = (u, \lambda v) = \lambda (u, v) \end{cases}$$

② $\{ (u, v) = (v, u)$

③ $\{ (u, u) > 0$ se $u \neq 0$

Se c'è un prodotto scalare $\Rightarrow$ ho una NORMA $\|u\|$ cioè una funzione $u \to \|u\|$ tale che

(A) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ $\quad$ (positività)

(B) $\|t u\| = |t| \, \|u\|$ $\quad$ (omogeneità di ordine 1)

(C) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\quad$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

IN EFFETTI DATO il prodotto scalare definisco la norma

$$\boxed{\|u\| = \sqrt{(u, u)}}$$

(la radice si può fare perché $(u,u) \geq 0$)

VEDIAMO CHE EFFETTIVAMENTE VALGONO (A) (B) e (C)

(A) $\|u\| \geq 0$ per definizione

se $\|u\| = 0 \Leftrightarrow (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ per (3)

(B) $\|t u\| = \sqrt{(tu, tu)} = \sqrt{t^2 (u,u)} = |t| \sqrt{(u,u)} = |t| \, \|u\|$

Per la disuguaglianza triangolare mi serve:

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ:

$$(*) \qquad |(u,v)| \le \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u,v \in X$$

INOLTRE VALE L'EGUAGLIANZA $\Leftrightarrow$ u e v sono lin. dip

$a u + b v = 0$ $\quad$ (se $v \neq 0$ $\quad u = tv \quad t \in \mathbb{R}$)
$(a,b) \neq (0,0)$

Dim. $\quad (*) \Leftrightarrow \boxed{(u,v) \le \|u\|^2 \|v\|^2 \quad (**)}$

se $v = 0$ vale l'eguaglianza (e u e v sono lin. dip.)

Supponiamo $v \neq 0$ $\quad \|v\| \neq 0$. Consideriamo la seguente funzione di t $(\in \mathbb{R})$

$$0 \le \varphi(t) = \|u - tv\|^2 = (u - tv, u - tv) =$$

$$(u,u) + (u,-tv) + (-tv,u) + (-tv,-tv) =$$
$$\|u\|^2 - t(u,v) - t(v,u) + t^2 \|v\|^2 =$$
$$\|u\|^2 - 2t(u,v) + t^2 \underbrace{\|v\|^2}_{\neq 0}$$ $\leftarrow$ polinomio di 2° grado in t

Poiché $\varphi \ge 0$ il $\frac{\Delta}{4}$ del polinomio deve essere ≤ 0

cioè $\underline{(u,v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2} \le 0 \Leftrightarrow (**)$

Rimane il caso in cui vale "=" e cioè $\boxed{\Delta = 0}$

Ma se $\Delta = 0$ il polinomio $\varphi(t)$ ha una radice (doppia)
$\bar{t} = \frac{(u,u)}{\|v\|^2}$ $\quad$ cioè $\varphi(\bar{t}) = 0$

$$\Leftrightarrow \|u - \bar{t} v\|^2 = 0 \Leftrightarrow u = \bar{t} v$$ (u è sulla retta di v)

#

DA SCHWARTZ RICAVO LA DIS. TRIANGOLARE :

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u)+2(u,v)+(v,v) = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

dato che sono numeri ≥ 0 posso fare la radice

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad ((c)\ !!)$$

SUPPONIAMO CHE IN X ci sia un prod. scalare $(\cdot,\cdot)$

<u>Def.</u> Dico che u e v sono <u>ORTOGONALI</u> se $(u,v)=0$

<u>FATTO</u> Se $u_1 \dots u_k$ sono mutuamente ortogonali, e non sono <u>nulli</u>

$\Rightarrow$ $u_1 \dots u_k$ sono linearmente indip.

<u>Dim</u> Suppongo che $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ e che

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$$

MOLTIPLICO SCALARMENTE per u_i $(i=1 \dots k)$

$$(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k, u_i) = (0, u_i) = 0$$

$$\underbrace{\lambda_1 (u_1, u_i)}_{=0} + \dots + \lambda_i (u_i, u_i) + \dots + \underbrace{\lambda_k (u_k, u_i)}_{=0} = \lambda_i \|u_i\|^2$$

$\|u_i\|^2 \neq 0$

NECESSARIAMENTE $\lambda_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow$ <u>TESI</u> #

DUNQUE SE TROVO N vettori ($u_1 \dots u_N$) ortogonali $\neq 0$, e dim $X = N$

$\Rightarrow \{u_1 \dots u_N\}$ è una base (BASE ORTOGONALE)

<u>FATTO</u> Se $u_1 \dots u_N$ è una BASE ORTONORMALE (ORTOGONALE e $\|u_i\|=1$ $i=1 \dots N$)

è facile trovare le coordinate rispetto a questa base:

Se $u \in X$ e voglio $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_N u_N$ $(\ast\ast\ast)$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_i = (u, u_i)$$

(basta moltiplicare $(\ast\ast\ast)$ per u_i $\rightarrow$ $(u, u_i) = 0 + \cdots + \lambda_i \overbrace{(u_i, u_i)}^{\overset{1}{\shortparallel}} + 0 = \lambda_i$)

FATTO Se in X c'è il prodotto scalare posso sempre costruire una base ortonormale

(NO DIM.)

1 Esercizi sulla segnatura di forme quadratiche

Studiare la segnatura delle seguenti forme quadratiche mediante il criterio di Sylvester:

1. $\Phi(x, y) = -x^2 + 10xy - y^2$;
2. $\Phi(x, y) = -x^2 + 2\sqrt{2}xy - 2y^2$;
3. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$;
4. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$;
5. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$;
6. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 2yz$;
7. $\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz - 2yz$.

Negli esercizi da (1) a (6) si trovino anche gli autovalori e gli autovettori della matrice corrispondente (verificando che effettivamente il segno degli autovalori corrisponde con quello desunto dal criterio).