Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 02 29/09/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

- $\mathbb{X}$ spazio vettoriale di dimensione finita $\to$ c'è una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_N\}$

- Se L è lineare da $\mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$, con basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ trovo una matrice $A = [L]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}$ tale che

$$[L\, u]_{\mathcal{B}_1} = A \cdot [u]_{\mathcal{B}}$$

Inoltre posso dire che $A = \Big[\, [L u_1]_{\mathcal{B}_1} \cdots [L u_N]_{\mathcal{B}_1} \Big]$

dove $u_1 \cdots u_N$ sono gli elementi di $\mathcal{B}$

- Se $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ e $\mathbb{X} = \mathbb{R}^M$ e se A è una matrice $M \times N$ allora è definita l'applicazione

$$\mathbb{R}^N \ni u \longrightarrow A u \in \mathbb{R}^M$$

Posso indicare con L_A questa applicazione.

È chiaro che se metto $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N\}$ in $\mathbb{R}^N$ $\left(\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{esimo} \right)$ e metto $\hat{\mathcal{B}}_1 = \{ \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_M \}$ su $\mathbb{R}^M$

risulta $\quad [L_A] = A$

Però se metto una base generica $\mathcal{B} = \{u_1 \dots u_N\}$ su $\mathbb{R}^N$ e un'altra $\mathcal{B}_1 = \{v_1 \dots v_M\}$ in $\mathbb{R}^M$, L_A si rappresenta con un'altra matrice (si vede usando i disegni di ieri)

$$A_1 = [v_1 | \dots | v_M]^{-1} A \, [u_1 | \dots | u_N]$$

APPLICAZIONI BILINEARI

$\mathbb{X}$ spazio vett. (di dim finita)

$a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, cioè una funzione con due argomenti

$$\underset{\mathbb{X}\ \ \mathbb{X}}{(u, v)} \mapsto a(u,v) \in \mathbb{R}$$

a è detta <u>bilineare</u> se è

- $a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v)$
- $a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2)$
- $a(\lambda u, v) = a(u, \lambda v) = \lambda \, a(u,v)$

- Una app. bilineare si dice <u>strettamente positiva</u> se

$$a(u,u) > 0 \quad \text{quando } u \neq 0$$

- Una app. bilineare si dice <u>simmetrica</u> se

$$a(u,v) = a(v,u)$$

<u>Def.</u> Si dice "prodotto scalare" una qualunque app. bilineare simmetrica e positiva

<u>NOTA</u> Se $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ e $\quad X = (x_1 \dots x_N),\ Y = (y_1 \dots y_N)$

$$a(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$$

è una app. bilineare positiva (simm.) $\rightarrow$ prodotto scalare canonico

FATTO Se a è una app. bilineare e se $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$ è una base per X, posso definire la matrice A $N \times N$

di elementi $a_{ij} = a(e_i, e_j)$

Allora se u e $v \in X$ $\quad u = u_1 e_1 + \dots + u_N e_N$
$\quad v = v_1 e_1 + \dots + v_N e_N$

$$\Rightarrow \quad a(u,v) = a\left(\sum_{i=1}^N u_i e_i , \sum_{j=1}^N v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_i v_j a(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^N u_i \sum_{j=1}^N a_{ij} v_j = [u]_{\mathcal{B}}^t A [v]_{\mathcal{B}}$$

(la trasposta A^t di una matrice a_{ij} ha elementi a_{ji}
se $A = (a_{ij})$ $\quad A^t = (a_{ji})$)

$$\boxed{a(u,v) = [u]_{\mathcal{B}}^t A [v]_{\mathcal{B}}}$$

Se a è simmetrica $\iff$ A è simmetrica $\iff A = A^t$

OSS. Segue che un generico prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$ si scrive come $\boxed{u \cdot v = u^t A v}$ con A simmetrica (e "positiva") - il caso canonico corrisponde a $A = I$

Def. Chiamo "forma quadratica" una funzione $\phi : X \to \mathbb{R}$ tale che esiste $a : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineare per cui

$$\phi(u) = Q(u,u) \qquad \forall u \in X$$

Dico che una tale ϕ è

- positivo se $\phi(u) \geq 0 \quad \forall u$
- strettamente positivo se $\phi(u) > 0 \quad \forall u \neq 0$
- negativo se $\phi(u) \leq 0 \quad \forall u \in X$
- strettamente negativo se $\phi(x) < 0 \quad \forall u \neq 0$

(uso questa terminologia anche per le app bilineari e le matrici quadrate)

<u>OSS.</u> Se $\phi(u) = Q(u,u)$, Q bilineare POSSO SUPPORRE CHE Q sia SIMMETRICA. INFATTI se Q non è simmetrica posso considerare $\bar{Q}(u,v) = \frac{Q(u,v) + Q(v,u)}{2}$ (la "simmetrizzata" di Q). Vedo che $\bar{Q}$ è simmetrica e

$$\underline{\bar{Q}(u,u)} = \frac{Q(u,u) + Q(u,u)}{2} = Q(u,u) = \phi(u)$$

Da quanto detto prima, se B è una base per X si ha

$$\phi(u) = [u]_B^t \, A \, [u]_B \quad \text{con } A \text{ matrice } N \times N \text{ simmetrica}$$

Ricordiamo:

<u>Def.</u> $L : X \to X$ è lineare (A matrice quadrata)

dico che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di L (di A)

se $\exists \; u \in X$, $u \neq 0$ con $L u = \lambda u$ ($A \cdot u = \lambda u$)

u si dice autovettore per λ

<u>Fatti</u>. (a) λ è autovalore (per la matrice A) $\Longleftrightarrow$ λ è una radice del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det|A - \lambda I|$ (ha grado $N = \dim X$)

(b) Se u_1 è autovettore per λ_1 / u_2 autovettore per u_2 $\Rightarrow$

u_1 e u_2 sono linearmente indip.

$\Rightarrow$ se A ammette N autovalori distinti allora esiste una base fatta di autovettori $\Longleftrightarrow$ A è diagonalizzabile

cioè esiste M matrice $N \times N$ invertibile tale che

$$\boxed{A = M D M^{-1}} \qquad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix} \qquad \lambda_i \text{ autovalori}$$

M è il cambio di base da $\{\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N\}$ a $\{e_1 \dots e_N\}$ autovettori

$(M \hat{e}_i = e_i \Longleftrightarrow M^{-1} e_i = \hat{e}_i)$

Se per esempio calcolo A su e_1 vedo che

$$M D M^{-1} e_1 = M D \hat{e}_1 = M(\lambda_1 \hat{e}_1) = \lambda_1 M \hat{e}_1 = \lambda_1 e_1$$

<u>TEOREMA SPETTRALE</u> Se A è <u>simmetrica</u> $\Rightarrow$ ha solo autovalori reali e ammette una base di autovettori

DUNQUE VALE LA FORMULA

$$A = M \, D(\underbrace{\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_N}_{\text{NON NECESSARIAMENTE DISTINTI}}) \, M^{-1}$$

<u>CONSEGUENZA</u> Se ϕ è una forma quadratica e se A SIMMETRICA rappresenta ϕ nel senso della sopra $\left(\phi(u) = [u]^t A [u]\right)$

$\phi \geq 0 \Longleftrightarrow$ tutti gli autovalori di A sono ≥ 0

$\phi > 0 \Longleftrightarrow$ " " " " " sono > 0

. stesso discorso per $\leq$ / $<$

<u>Esempio</u> (in $\mathbb{R}^2$) $\quad \phi(x, y) = x^2 + xy + y^2$

ϕ è una forma quadratica (è un polinomio di grado 2, OMOGENEO) ed è rappresentata dalla matrice A data sotto:

$$[x, y] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + xy + y^2$$

Per capire se ϕ è $>$ / $<$ / ... mi SERVONO (per ora) gli autovalori di A (esistono perché A è simmetrica)

calcolo $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4}$

$$P(\lambda) = 0 \iff (1-\lambda)^2 = \frac{1}{4} \iff 1-\lambda = \pm\frac{1}{2} \iff \lambda = 1 \mp 1/2 = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}$$

<u>ENTRAMBI POSITIVI</u> $\Rightarrow$ ϕ è strettamente positiva

<u>IN REALTÀ</u> c'è un criterio per trovare il segno di ϕ senza calcolare gli autovalori. Per enunciare questo criterio ho bisogno di una definizione

<u>Def.</u> Se A è una matrice $N \times N$ definisco ① i "<u>MINORI PRINCIPALI</u>" di A = ogni sottomatrice ottenuta da A cancellando un gruppo di righe e lo <u>STESSO</u> gruppo di colonne

Esempio:

$$A \; \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 8 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1^\circ \\ \\ 3^\circ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1^\circ & & 3^\circ & \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

② i "<u>MINORI PRINCIPALI DOMINANTI</u>" le sottomatrici ottenute da A cancellando le ultime K righe e le ultime K colonne, al variare di $K = 0, 1, \dots, N-1$

(SONO N)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{MINORI PRINCIPALI DOMINANTI}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

CRITERIO (SYLVESTER)

- $A \geqslant 0 \iff$ tutti i minori principali hanno determinante $\geqslant 0$
- $A > 0 \iff$ tutti i minori principali dominanti hanno determinante > 0