Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 01 28/09/20

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

(SU TEAMS)

Argomenti del corso

Rispetto al corso di Analisi Uno, in cui l'ambiente era $\mathbb{R}$, si andranno a studiare le proprietà degli **spazi** N**- dimensionali** e le funzioni di **più variabili**.

Gli argomenti si possono suddividere come segue (non necessariamente in questo ordine preciso):

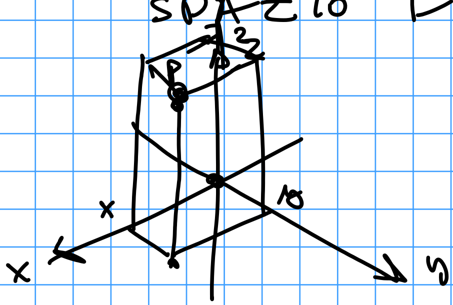
- Limiti e continuità in spazi di dimensione $N > 1$.
- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.
- Calcolo integrale per funzioni di più variabili.
- Curve e integrali curvililinei
- Superfici e integrali di superficie.
- Elementi di calcolo differenziale sulle superfici (teoremi di Stokes e della divergenza)
- Successioni e serie di funzioni. Serie di potenze. Serie di Fourier.
- Sistemi di equazioni differenziali. Sistemi lineari.

$$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \;/\; \mathbb{R}^M$$ (da N variabili in M variabili)

tipicamente $N = 2/3$, $M = 1$

CORRISPONDENZA (tramite le coordinate)

SPAZIO "FISICO" $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$

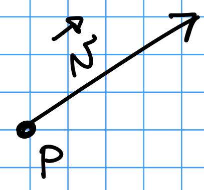


$$P \longmapsto (x, y, z)$$

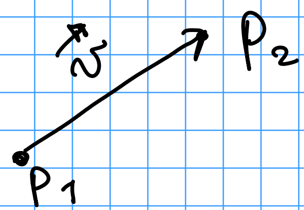
(FISSATO IL SISTEMA DI RIF.)

oltre ai punti ci sono i vettori

~ Frecce



anche i vettori si rappresentano con le coordinate



posso introdurre l'idea

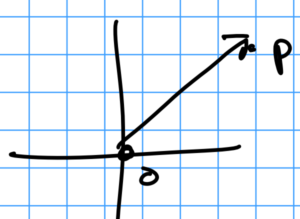
$$\vec{v} = P_2 - P_1$$

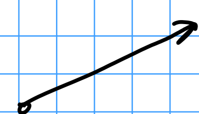
$$P_2 = P_1 + \vec{v}$$

In realtà potrei pensare a un punto P come

il vettore che congiunge l'origine O e P

$$\vec{v} = P - O$$



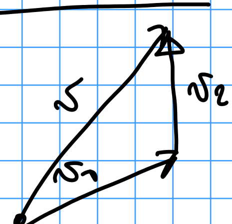


PUNTO + vettore = PUNTO

vettore + vettore = vettore

E' DEFINITA LA SOMMA DI DUE VETTORI

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$



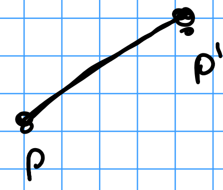
← regola del parallelogramma

E' DEFINITA la distanza tra due punti:

$$d(P, P') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

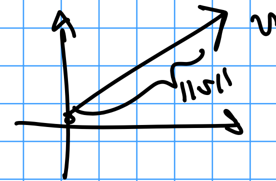
$P = (x, y, z)$ $\quad P' = (x', y', z')$

(teorema di Pitagora)



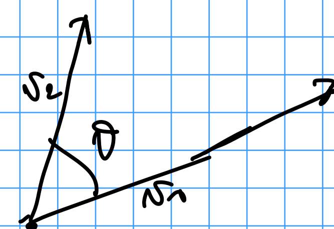
≃ se $\vec{v} = (x, y, z)$ chiamo norma di $\vec{v}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$$d(P, P') = \| P' - P \|$$

Prodotto scalare due vettori



$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos(\theta)$$

θ è l'angolo compreso tra v_1 e v_2

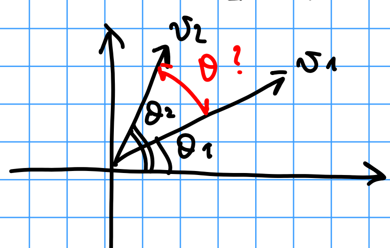
[IN TERMINI DI COORDINATE :

$\vec{v} = (x, y, z)$ $\quad$ $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = x x_1 + y y_1 + z z_1$] $\Rightarrow$

SI DIMOSTRA : se suppongo che i due vettori siano bidimensionali $\Rightarrow$

$\vec{v}_1 = (x_2, y_2)$ $\quad$ $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ $\quad$ Allora



$x_1 = \|\vec{v}_1\| \cos\theta_1$

$y_1 = \|v_1\| \sin\theta_1$

$x_2 = \|v_2\| \cos\theta_2$

$y_2 = \|v_2\| \sin\theta_2$

$\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow$

$$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|v_1\| \|v_2\| \cos\theta = \|v_1\| \cos\theta_1 \|v_2\| \cos\theta_2 + \|v_1\| \sin\theta_1 \|v_2\| \sin\theta_2$$

$= x_1 y_1 + x_2 y_2$

#

IN PARTICOLARE

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \longmapsto \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ HA LE PROPRIETÀ

- LINEARE IN $\vec{v}_1$ (fissato $\vec{v}_2$) e in $\vec{v}_2$ (fissato $\vec{v}_1$)

  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{BILINEARE}}$

- SIMMETRICA $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$

- STRETTAMENTE POSITIVA :

  $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ se $\vec{v} \neq 0$

  IN EFFETTI $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

IN REALTÀ NOI LAVORIAMO SU $\mathbb{R}^N$

(più generale di $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ che possono servire come guida - intuizione)

$\mathbb{R}^N = (x_1 \cdots x_N)$ $\leftarrow$ ESEMPIO (CANONICO) DI $\boxed{\text{SPAZIO VETTORIALE}}$

RIEPILOGO DEGLI SPAZI VETTORIALI

SPAZIO VETTORIALE è un insieme X su cui sono definite due operazioni:

SOMMA $u, v \in X \longrightarrow u+v \in X$

PRODOTTO PER GLI SCALARI $u \in X$ $\lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \lambda u \in X$

e queste operazioni verificano le solite proprietà

Def. (lin. indip.) $v_1 \cdots v_K \in X$ si dicono lin. indip. se

$\lambda_1 .. \lambda_K \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_K v_K}_{\text{combinazione lineare}} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_K = 0$

FATTO Se $v_1 .. v_K$ sono lin. indip e

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_K v_K = \lambda_1' v_1 + \cdots + \lambda_K' v_K$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1' \quad \cdots \quad \lambda_K = \lambda_K'$$

Def. Dico che $v_1 .. v_N$ è una base di X se:

- $v_1 \cdots v_N$ sono lin. indip
- ogni $v \in X$ si esprime come comb. lin. di $v_1 .. v_N$
  (cioè $\forall v \in X \ \exists \lambda_1 .. \lambda_N \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 \cdots \lambda_N v_N$)

FATTO Se $v_1 .. v_N$ è una base di X, per ogni $v \in X$ esistono UNICI $\lambda_1 .. \lambda_N$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_N v_N$

Tali numeri $\lambda_1 .. \lambda_N$ si chiamano COORDINATE di v rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_N\}$

$$v \in X \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$$

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \boxed{[v]_{\mathcal{B}}} \quad (\in \mathbb{R}^N)$$

FATTO Se $(v_1 .. v_N)$ è una base per X e $(w_1 \ldots w_M)$ è un'altra base $\Rightarrow N = M$

TALE N si chiama DIMENSIONE DI X

$$N = \dim(X)$$

ATTENZIONE X potrebbe non avere una base (finita)

ESISTONO SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE ∞

Vediamo un esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita

$X = \{$ funzioni continue su $[0,1]\} =$

$\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ f$ continua $\}$

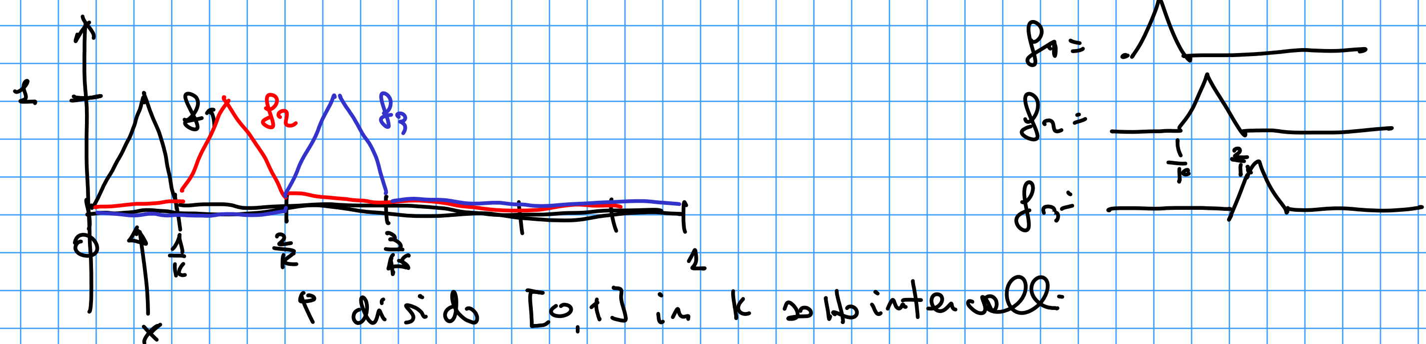
(gli oggetti in X sono delle funzioni, per esempio $f(x) = x$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = e^x$ e $0 \leq x \leq 1$)

X è uno spazio vett. perché se f, g sono funzioni continue $\Rightarrow$ $f + g$ e λf sono funzioni continue

VEDIAMO CHE X NON HA DIM. FINITA: FACCIO VEDERE che $\forall k \in \mathbb{N}$ esistono k elementi di X

$f_1, f_2, \ldots, f_k$, LIN. INDIP.

Definisco $f_1 \ldots f_k$ disegnandone il grafico



divido $[0,1]$ in k sottointervalli

$f_1 \ldots f_k$ sono k funzioni continue. Affermo che sono lin. indip. cioè che presi $\lambda_1 \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underbrace{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_k f_k = 0}_{\Updownarrow} \ \left(\begin{array}{c} 0 \text{ è la} \\ \text{funzione nulla}\end{array}\right)$$

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

se prendo $x \in]0, 1/k[$ $\Rightarrow$ $f_2(x) = f_3(x) = \cdots = f_k(x) = 0$

$f_1(x) \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1 f_1(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

nello stesso modo se $x \in]1/k, 2/k[$ $0 = f_1(x) = f_3(x) = \dots f_k(x)$
$f_2(x) \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$ e così via $\lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$

DUNQUE $f_1 \dots f_k$ sono lin. indip. MA k è arbitrario

<u>$\mathbb{X}$ NON HA DIM FINITA</u>.

PER ORA SUPPORREMO $\mathbb{X}$ vett. di dim $< +\infty$

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Dati $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ sp vett. e data $L : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$

dico che L è lineare se

$$L(u+v) = Lu + Lv \qquad \forall u, v \in \mathbb{X}_1$$
$$L(\lambda u) = \lambda Lu \qquad \forall u \in \mathbb{X}_1 \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE LE MATRICI

Dati N ed M interi ≥ 1 chiamo matrice

$N \times M$ (N righe ed M colonne) una tabella

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{M1} \\ & & \\ a_{1N} & & a_{NM} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{M}(N, M)$

<u>CONVENIAMO</u> che i vettori di $\mathbb{R}^N$ siano delle matrici $N \times 1$

$(x_1 \dots x_N)$ lo scrivo $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_N \end{bmatrix}$

Def. $A \in \mathcal{M}(M, N)$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$

prodotto $Av \in \mathbb{R}^M$

con la proprietà

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j \qquad i = 1 \dots M$$

TEOREMA Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ spazi vettoriali.

$B_1 = \{ v_1 \dots v_N \}$ base per $\mathbb{X}_1$ ($\dim \mathbb{X}_1 = N$)

$B_2 = \{ w_1, \dots, w_M \}$ base per $\mathbb{X}_2$ ($\dim \mathbb{X}_2 = M$)

$L : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ lineare.

Definiamo $A := \left[[Lv_1]_{B_2}, [Lv_2]_{B_2}, \dots, [Lv_N]_{B_2} \right]$

A ha come colonne le immagini $Lv_1 \dots Lv_N$ (dei vettori della base B_1), scritti rispetto alla base B_2

A ha M righe e N colonne

A ha la seguente proprietà:

$\rightarrow$ $[Lv]_{B_2} = A \cdot [v]_{B_1} \qquad \forall v \in \mathbb{X}_1$

$\left([v]_B \in \text{coordinate di } v \text{ nella base } B \right)$

IN QUESTO SENSO A "rappresenta" L $\leftarrow$ FISSATE LE BASI

OSS. Posso considerare $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$

e prendere come base $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \hat{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(base canonica) $\hat{B}$

Allora è chiaro che $\forall v \in \mathbb{R}^N \quad v = [v]_{\hat{B}}$

Però, per esempio, se in $\mathbb{R}^2$ prendo $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

allora il vettore $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha coordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ rispetto alla base (e_1, e_2) : basta notare che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SCRIVO $\qquad A = [L]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$

FATTI (1) $\cdot\ [L_1 + L_2]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = [L_1]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} + [L_2]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$

(2) se ho tre spazi $\mathbb{X}_1$ $\mathbb{X}_2$ $\mathbb{X}_3$ con basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$

e $L_1 : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$, $L_2 : \mathbb{X}_2 \to \mathbb{X}_3$ LINEARI

$\Rightarrow$ posso considerare la composizione $L = L_2 \circ L_1 : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_3$

Allora $\quad [L]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3} = [L_2]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3} [L_1]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$

CASO PARTICOLARE $\quad \mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2 \ (= \mathbb{X}) \qquad L = Id$

$(Lx = x \quad \forall x)$ $\qquad \mathcal{B}_1 \ \mathcal{B}_2$ sono due basi di $\mathbb{X}$

- OVVIAMENTE se $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ $\quad [Id] = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Ne segue $\quad [Id]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} [Id]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} = [Id]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1} = I$

da cui $\quad \boxed{[Id]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = [Id]^{-1}_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}}$

$M = [Id]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$ è la matrice che mi descrive il "cambio di base"

se $v_1 \ldots v_N$ sono le coordinate di $\vec{v}$ in $\mathcal{B}_1$ $\Rightarrow$

$M \begin{bmatrix} v_1 \\ v_N \end{bmatrix}$ = coordinate di $\vec{v}$ in $\mathcal{B}_2$

Allora se mi metto in $\mathbb{R}^N$ e considero $\hat{\mathcal{B}}$ = base canonica

se $\quad \mathcal{B}_1 = \{v_1 \ldots v_N\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{w_1 \ldots w_N\}$

Sia la matrice $M = [v_1 | \cdots | v_N]$ $(N \times N)$
(ha come colonne i vettori $v_1 \ldots v_N$)

per quanto detto sopra $M = [I_d]_{\hat{B}, B_1}$

e quindi $[I_d]_{B_1, \hat{B}} = [v_1 | \cdots | v_N]^{-1}$

e infine $[I_d]_{B_1 B_2} = [I_d]_{B_2 \hat{B}} [I_d]_{\hat{B} B_1} =$

$$\underbrace{[w_1 | \cdots | w_N] \cdot [v_1 | \cdots | v_N]^{-1}}$$

cambio di base da $\{v_1 \ldots v_N\}$ a $\{w_1 \ldots w_N\}$

#