NOME: | COGNOME: | MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 4 giugno 2020

Istruzioni di compilazione: Si usi:

lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;

il carattere `^` per indicare la potenza `2^3` per 2^3;

`sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;

`exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;

`Pi` per π;

le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;

le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;

Inizio Test

1. Si consideri l'insieme V in $\mathbb{R}^3$ definito da $\{(x,y,z) : x+y+2z=-1, xyz^2=0\}$.

(a) Si dica quali di questi punti appartengono a V (2p.):

$(a)\quad P_0 = (0,-1,1)$ NO $\qquad (b)\quad P_0=(1,1,0)$ NO $\qquad (c)\quad P_0=(1,0,-1) \qquad (d)\quad P_0=(-2,-1,1)$ NO.

$(a) \qquad (b) \qquad (c) \qquad (d)$

(b) Detto $P_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ il punto tra quelli sopra che si trova in V, si dica quali (anche più di una) tra le affermazioni seguenti è deducibile dal teorema del Dini (3p.):

SI (a) vicino a P_0 V è sostegno di una curva $\mathcal{C}^1$;

SI (b) vicino a P_0 V si descrive come $\{(x, f(x), g(x)) : x \text{ vicino a } X_0\}$ per opportune f, g di classe $\mathcal{C}^1$;

NO (c) vicino a P_0 V si descrive come $\{(f(y), y, g(y)) : y \text{ vicino a } Y_0\}$ per opportune f, g di classe $\mathcal{C}^1$;

SI (d) vicino a P_0 V si descrive come $\{(f(z), g(z), z) : z \text{ vicino a } Z_0\}$ per opportune f, g di classe $\mathcal{C}^1$.

$(a) \qquad (b) \qquad (c) \qquad (d)$

(c) Si dica quale dei seguenti vettori $\vec{T}$ è tangente a V nel punto P_0 (2p.):

$(a)\quad \vec{T} = (2,-1,0)$ NO $\qquad (b)\quad \boxed{\vec{T} = (-2,0,1)} \qquad (c)\quad \vec{T}=(1,0,-2) \qquad (d)\quad \vec{T}=(1,1,-1)$ NO

$(a) \qquad (b) \qquad (c) \qquad (d)$

2. Si considerino la funzione $f(x,y) := 3x^2 + 9y$ e l'insieme $M := \{4x^2 + 9y^2 = 36, x \geq 0\}$.

(a) Si dica quali dei seguenti punti è stazionario vincolato per f su M (3p.):

$(a)\quad (0,3)$ $(0,2)$ $\qquad (b)\quad (2,0)$ $(3,0)$ $\qquad (c)\quad \left(3, \frac{2}{3}\right) \qquad (d)\quad \left(-3, \frac{2}{3}\right)$ NO $\notin M$

$(a) \qquad (b) \qquad (c) \qquad (d)$

(b) Ci sono altri punti stazionari (vincolati) per f su M (2p.)?

Sì ce ne sono $\qquad$ No non ce ne sono

(c) Ci sono punti stazionari per f nella parte interna di M(1p.)? (i vertici)

Sì ce ne sono $\qquad$ No non ce ne sono

(d) È possibile che il massimo di f su M faccia 18 (2p.)? $\left(f(3, \frac{2}{3}) = 4 \cdot 9 + 9 \frac{4}{9} = 40 > 18 \right.$

Sì $\qquad$ No

3. Siano $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ e $\vec{f} := xy(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$.

(a) Si calcoli la normale unitaria uscente da D nel punto $P_0 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ (2p.):

$$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{}\,\vec{i} + \boxed{}\,\vec{j} + \boxed{}\,\vec{k}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0$

(b) Si calcoli la divergenza di $\vec{f}$ (1p.):

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \boxed{5\,x\,y}$$ $2xy + 2xy + xy$

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ uscente da D attraverso ∂D (4p.):

$$\Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \boxed{}$$ $5/4$

(ν è la normale uscente).

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

con la stessa normale della domanda precedente (N.B. $S \subset \partial D$) (3p.):

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{}$$ 1

4. Supponiamo che la matrice 4×4 A si fattorizzi come segue:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{M^{-1}}$$

$\lambda = -1$

$\lambda = 2$

(a) Quali sono la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore $\lambda = -1$ (1+2p.):

$$m_A(\lambda) = \boxed{}\ 3 \qquad m_G(\lambda) = \boxed{}\ 2$$

(b) Se $B = A + I$ si dica per quale esponente h si ha $\mathrm{Ker}B^{h-1} \neq \mathrm{Ker}B^h = \mathrm{Ker}B^{h+1}$ (2p.):

$$h = \boxed{}\ 2$$

($J_r(\lambda)$ si stabilizza dopo r potenze)

(c) Si scriva la soluzione del sistema (5p.)

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dove } Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

TERZA COLONNA DI M

$M\hat{e}_3 = Y_0$

$M^{-1}Y_0 = \hat{e}_3$

$$x(t) = \boxed{}$$
$$y(t) = \boxed{}$$
$$w(t) = \boxed{}$$
$$z(t) = \boxed{}$$

Fine Test

$$Y(t) = M e^{tJ} \underbrace{M^{-1} Y_0}_{\hat{e}_3} = M \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} M \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{e^{-t} \begin{bmatrix} t \\ 2 \\ 2 \\ 1+t \end{bmatrix}}$$

(1) $V = \{x+y+2z=-1,\ xyz^2=0\}$

$\rightarrow P_0 = (1, 0, -1)$

Applichiamo del Dini in P_0

$$G(x,z,z) = \begin{pmatrix} x+y+2z+1 \\ xyz^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$J_G(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{bmatrix}$$

$$J_G(1,0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

VICINO A P_0

$\frac{\partial G}{\partial(xy)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ INVERTIBILE $\rightarrow$ posso esplicitare $x\, y$ in funzione di z

$\frac{\partial G}{\partial(xz)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ NON INVERTIBILE $\rightarrow$ NON SO se posso x, z in funzione di y

$\frac{\partial G}{\partial(yz)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ INVERTIBILE $\rightarrow$ posso esplicitare yz in funzione di x

Da quanto sopra so che $V =$ sostegno di $\gamma(t)$ $t \simeq t_0$

$\gamma(t_0) = P_0$

Per trovare $\gamma'(t_0)$ devo usare una delle parametrizzazioni sopra. PER ESEMPIO $\gamma(z) = (\underbrace{f(z), g(z)}_{F(z)}, z)$ $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

F: INTORNO DI $-1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Dal Dini

$$J_F(-1) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(xy)}(P_0)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial z}(P_0) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f'(-1) = -2 \\ g'(-1) = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \gamma'(-1) = (f'(-1), g'(-1), 1) = (-2, 0, 1)$$

$\Rightarrow$ retta tangente a γ in P_0 è $\{ t(-2,0,1) \quad t \in \mathbb{R} \}$

SI ARRIVA ALLO STESSO RISULTATO SCRIVENDO

$\gamma(x) = (x, f(x), g(x)) \quad x \simeq 1 \quad \leadsto \gamma'(1) = (1, 0, -1/2)$

IN MANIERA PIÙ VELOCE PER VEDERE SE $\vec{T}$

è tangente a V in P_0 è di notare che

le due righe di $J_G(P_0)$ sono due vettori lin. indip

che individuano lo spazio normale a V in P_0

$$J_G(1,0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$N_{P_0}(V) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Leftrightarrow T_{P_0}(V) = \left\{ \vec{T} : \vec{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 , \vec{T} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$\vec{T} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deve essere $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\vec{T} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \leftarrow$ vettori tangenti, $z \in \mathbb{R}$

(2)

$f(x,y) = 3x^2 + 9y \quad M = \{4x^2 + 9y^2 \leq 36, x \geq 0\}$

$P_0 = (\qquad)$

Pti stazionari per f su M.

$M = \{ G_1(x,y) \leq 0, \; G_2(x,y) \leq 0 \}$ dove $G_1(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - 36$

$G_2(x,y) = -x$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x \\ 9 \end{pmatrix} \quad \nabla G_1 = \begin{pmatrix} 8x \\ 18y \end{pmatrix} \quad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

I PUNTI STAZ. VINCOLATI SI CLASSIFICANO:

- $G_1 < 0 \quad G_2 < 0 \qquad \nabla f = 0 \qquad \begin{matrix} 6x = 0 \\ 9 = 0 \end{matrix}$ IMPOSSIBILE

• $G_1 = 0 \quad G_2 < 0 \qquad \nabla f = \lambda \nabla G_1$

$$\begin{cases} 6x = 8\lambda x \\ y = 18\lambda y \\ 4x^2+9y^2 = 36 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3/4 \\ y = 18\cdot\frac{3}{4} y \\ 4x^2+9y^2=36 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3/4 \\ y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ 4x^2 + 9\,\frac{4}{9} = 36 \\ x>0 \end{cases}$$

$x^2+1 = 9 \quad x^2 = 8 \quad x = 2\sqrt{2}$

$(2\sqrt{2}, 2/3)$

$(0,2)$ annulla G_1 e non G_2 $\Rightarrow$ NON È STAZIONARIO

• $G_1 < 0 \quad G_2 = 0 \qquad \nabla f = \lambda \nabla G_2$

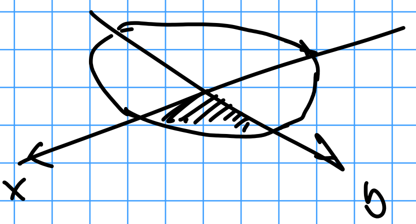
$$\begin{cases} 6x = \lambda \\ y = 0 \\ x=0 \quad 4x^2+9y^2 < 36 \end{cases}$$

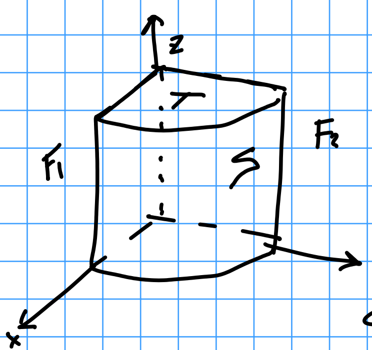
IMPOSSIBILE

• $G_1 = G_2 = 0 \quad \nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2 \Rightarrow$ I DUE VERTICI $(\pm 2, 0)$

SEMPRE VERA IN $\mathbb{R}^2$

(3) $D = \{x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\} \qquad \vec{f} = xy(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$





$\phi(\partial D) =$
$\phi(S) + \phi(F_1) + \phi(F_2) + \phi(T)$

su F_1 $\hat{\nu} = -\vec{j}$
su F_2 $\hat{\nu} = -\vec{i}$

$\phi(F_1) = \iint_{F_1} -\vec{f}_2 \cdot = 0$
$\phi(F_2) = \ \cdot \ = 0$

$P_0 \in \tilde{S} = \{x^2+y^2 = 1 \quad x>0,\ y>0,\ 0<z<2\}$

$S \setminus \Sigma(S)$

$G(x,y,z) = x^2+y^2-1$

$$\hat{\nu}(P_0) = \frac{\nabla G(P_0)}{|\nabla G(P_0)|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=1}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \iiint_D 5xy\,dx\,dy\,dz = 2\iint_{D_1} 5xy\,dx\,dy$$

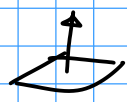
$D_1 = \{x^2+y^2 \le 1 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0\} =$

$$10 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \cos\theta \sin\theta \, \rho^2 \, \rho \, d\rho =$$

$$5 \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \underbrace{\int_0^1 \rho^3 \, d\rho}_{=1/4} = \frac{5}{4} \underbrace{\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2}}_{1} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} = \Phi(\partial D) = \Phi(S) + \Phi(T)$$

$T = \{ x^2+y^2 \le 1 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0 \quad z = 2 \}$ $\qquad \hat{\nu} = k$



$$\Phi(T) = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1, \, x \ge 0 \, y \ge 0\}} f_3(x,y,2)\, dx\,dy = 2 \int_{\{ \}} xy \, dx\,dy$$

$= \frac{1}{4}$ (come prima)

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(S) = 1}$$

DOMANI :

- CI SARÀ UNA RIUNIONE TEAMS DI CUI STASERA FORNIRÒ IL LINK
- CI SARÀ UN TEST CON GOOGLE MODULI (COME QUELLO DI ESEMPIO)

[BISOGNA AUTENTICARSI SU GOOGLE CON LE CREDENZIALI UNIPI]

PROVARE A VEDERE SE SI RIESCE A FARE IL TEST DI ESEMPIO (CHE ORA È SBLOCCATO)

- PORTATE UN DOCUMENTO – PRIMA DI COMINCIARE IL TEST FARÒ UN CONTROLLO
- IL TEST DURERÀ 1 h 10 m.
- UNA VOLTA CORRETTO IL TEST VI CHIAMERÒ

INDIVIDUALMENTE PER DISCUTERE LA RISOLUZIONE (del test) ⟶ VOTO (entro il primo appello)

$\Rightarrow$ VOTO COMPITINI = $\dfrac{\text{VOTO 1} + 3\,\text{VOTO 2}}{4}$ ← SI PUÒ USARE FINO A FINE SETTEMBRE

(VERBALIZZAZIONE NEL CORSO DI UN APPELLO)