Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 72 27/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

AVVISO Ci sarà un'altra lezione lunedì prossimo (RECUPERO)
con qualche altro esercizio

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$xy'' + (2x-3)y' - 10y = 80x$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (2p.):

$(\mathcal{R})$

$$(n-3)(n+1)\,a_{n+1} + 2(n-5)\,a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 80 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(b) Si dica, giustificando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e se è unica (1p.).

esiste unica | esiste non unica | non esiste

(c) Si mostri che, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione ha un'unica soluzione soluzione tale che $y^{(4)}(0) = \alpha$; si trovi il raggio di convergenza (della serie che definisce y) nel caso $\alpha = 1$ (1p.):

$R =$ $+\infty$.

(d) Si trovi esplicitamente la soluzione y tale che $\alpha = y^{(4)}(0) = 120$ (2p.).

$y(x) =$ $y = 3 - 10x + 5x^4 + 2x^5$

Svolgimento

4. $\left(\boxed{} \right.$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16 $\left. \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -2x - 4y + 4z \\ y' &= 3y - z \\ z' &= y + z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebrica e geometrica (2p.):

$$\lambda_1 = \boxed{-2},\ m_A = \boxed{1},\ m_G = \boxed{1},\quad \lambda_2 = \boxed{2},\ m_A = \boxed{2},\ m_G = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(2p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 1$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{e^{2t}}$$

$$y(t) = \boxed{-t e^{2t}}$$

$$z(t) = \boxed{(1-t)e^{2t}}$$

Svolgimento

3.

$$x y'' + (2x-3) y' - 10 y = 80 x$$

(Risolviamo per serie di potenze). Cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ (n=1)}}^{\infty} a_{n+1}\, n(n+1) x^{n-1} \left(= \sum_{n=0} a_{n+2}(n+1)(n+2) x^n \quad \text{MA NON CI SERVE QUI} \right)$$

$$x y'' + (2x-3) y' - 10 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} n(n+1) x^n + 2 a_n n x^n - 3 a_{n+1}(n+1) x^n - 10 a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{n+1} \Big(n(n+1) - 3(n+1) \Big) + a_n \Big(2n - 10 \Big) \right\} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n-3) a_{n+1} + 2(n-5) a_n \right\} x^n$$

IMPONGO CHE QUESTA SERIE SIA EGUALE $= 80x = \sum_{n=0} b_n x^n$

dove $b_n \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 80 & n = 1 \end{cases}$. QUINDI HO LE CONDIZIONI

$$(R') \quad a_{n+1}(n+1)(n-3) + 2(n-5) a_n = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

NOTA CHE Se $n=3 \Rightarrow -4 a_3 = b_3 = 0 \iff a_3 = 0$

se $n=2 \Rightarrow \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a_3}}\, 3 \cdot (-1) - 6 a_2 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{b_2}} \iff a_2 = 0$

se $n=1$ $\quad \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a_2}}\, 2 \cdot (-2) - 8 a_1 = b_1 = 80 \iff a_1 = -10$

Se $n=0$ $\quad \underset{-10}{\underset{\shortparallel}{a_1}}\, 1(-3) - 10 a_0 = b_0 = 0 \iff 30 a_1 = 10 a_0$

$$\iff \boxed{a_0 = 3}$$

$\boxed{a_0 = 3}$ $\boxed{a_1 = -10}$ $\boxed{a_2 = a_3 = 0}$

$$a_{n+1} = -\frac{2(n-5)}{(n+1)(n-3)} a_n \qquad n \geq 4$$

$\boxed{a_4 \text{ è libero}}$ $\qquad \boxed{a_5 = \frac{2}{5} a_4}$

$n=4$ $\quad a_5 = \frac{2}{5} a_4$

$n=5$ $\quad a_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 6$

Dunque la soluzione è un polinomio di grado 5 in cui posso mettere ad arbitrio il coefficiente di x^4

$$y(x) = 3 - 10x + a x^4 + \frac{2}{5} x^5 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

(b) $\exists$ soluzione con $y(0) = 3$? $\to$ $\boxed{SI}$ Tale soluzione è unica ? $\to$ $\boxed{NO}$

(per ogni a ho la soluzione scritta sopra che verifica $y(0)=3$)

(c) Noto che $a = \dfrac{y^{(4)}(0)}{4!} \iff y^{(4)}(0) = 24\,\alpha$

dunque dato α si prende $a = \dfrac{\alpha}{24}$ e si costruisce la soluzione con $y^{(4)}(0) = \alpha$

$R = +\infty$ perché y è un polinomio $a_n = 0$ $n \geq 6$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 0 \Rightarrow R = +\infty$

(d) $y^{(4)} = 120$ $\quad a = \dfrac{120}{24} = \dfrac{10}{2} = 5 \Rightarrow$

$$y = 3 - 10x + 5x^4 + 2x^5$$

(4) La matrice è

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = (-2-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)+1\right] = -(\lambda+2)(\lambda^2-4\lambda+4) =$$
$$-(2+\lambda)(\lambda-2)^2$$

$\lambda_1 = -2 \quad m_A = 1 \quad m_G = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \quad m_A = 2 \quad \underline{\underline{m_G = 1}}$

- Cerco un autovettore relativo a -2

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 2$ considero $B = A - 2I$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ ha rango 2 $\Rightarrow$ Ker B ha dim 1

Cerco una sequenza $e_3 \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} 0$ (in Ker B^2)

Calcolo B^2 (deve avere rango 1 $\Rightarrow$ che Ker B^2 ha dim 2)

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (ha rango 1)

Trovo $e_3 \in \text{Ker } B^2 \setminus \text{Ker } B$ $\quad e_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\Updownarrow$

$-x - y + z = 0$

$\boxed{z = x + y}$ $\quad e_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$ $\quad Be_3 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x - 4y + 4(x+y) \\ y - x - y \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \\ -x \end{bmatrix}$$

$x = 1 \quad y = 0 \quad z = 1$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

voglio risolvere $Y'(t) = A\,Y(t)$ $\quad Y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

NOTO CHE $Y_0 = e_3$. Dato che $e_3 = M\hat{e}_3$

$$\Rightarrow \hat{e}_3 = M^{-1} e_3 = M^{-1} Y_0 \qquad \text{DUNQUE}$$

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -t \\ -t+1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{2t} \qquad t=0 \qquad x(0)=1$$

$$y(t) = -t e^{2t} \qquad y(0)=0 \quad \text{TORNA}$$

$$z(t) = (1-t) e^{2t} \qquad z(0) = 1$$

VERIFICA

$$x'(t) = 2 e^{2t} \quad \text{TORNA}$$

$$y'(t) = -e^{2t} - 2t e^{2t} = -(1+2t) e^{2t} \quad \text{TORNA}$$

$$z'(t) = -e^{2t} + 2(1-t) e^{2t} = (1-2t) e^{2t} \quad \text{TORNA}$$

$$-2x(t) - 4y(t) + 4z(t) = e^{2t}\left(-2 + 4t + 4(1-t)\right) = e^{2t}(2)$$

$$3y(t) - z(t) = e^{2t}(-3t - 1 + t) = e^{2t}(-1-2t)$$

$$y(t) + z(t) = e^{2t}(-t + 1 - t) = e^{2t}(1-2t)$$

Calcoliamo e^{tA}:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det M = -1$$

$$M^{-1} = -\operatorname{cof} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} & -e^{-2t} \\ 0 & -e^{2t}(1+t) & te^{2t} \\ 0 & -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{2t} & -e^{-2t} + e^{2t} \\ 0 & e^{2t}(1+t) & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t}\,t & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} = e^{tA}$$

Vediamo se torna con quanto fatto prima

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{2t} & -e^{-2t} + e^{2t} \\ 0 & e^{2t}(1+t) & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t}\,t & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{e^{-2t}} - \cancel{e^{-2t}} + e^{2t} \\ -te^{2t} \\ (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}$$

← TORNA

ALTRO MATERIALE LUNEDÌ PROSSIMO