Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 71 26/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

SVOLGIAMO UN COMPITO DI ESAME

COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 1 febbrario 2020 - PARTE A

1. Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$. Si trovi (1 p. a risposta)

   (a) il raggio di convergenza della serie: $R = \boxed{e}$;

   (b) il valore di $f''(0) = \boxed{1}$ / non esiste .

2. Siano $G(x,y,z) := e^{x-y+2z} - xyz$ e $M := \{(x,y,z) \, : \, G(x,y,z) = 1\}$: Allora (1p. a risposta):

   (a) Indicare quali di questi punti appartiene a M. $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $\cancel{(1,1,0)}$, $(1,1,1)$.

   (b) detto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ il punto indicato in (a), allora vicino a P_0 f è grafico di una funzione $z = f(x,y)$ di classe $\mathcal{C}^1$ ~~VERO~~ FALSO;

   (c) in caso di risposta affermativa a (b) si trovi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \boxed{1}$.

3. Siano $\Omega := \{(x,y) \, : \, y > x\}$ e $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x,y) := \frac{\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}}{(x-y)^2}$. Si trovi (se esiste) un potenziale U per $\vec{f}$. (2p.)

   $U(x,y) = \boxed{-\frac{1}{(x-y)} + \text{costante}}$ non esiste

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

   (a) Siano A, B in $\mathbb{R}^2$ definiti come segue:

   $$A := \{(x,y) \, : 0 \le x^2 + y^2 \le 1\} \quad , \quad B := \{(x,y) \, : \, x^2 + y^2 = 0\} \cup \{(x,y) \, : \, x^2 + y^2 = 1\}.$$

   Allora $B = \partial A$ VERO ~~FALSO~~.

   (b) Siano $\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ e $\Gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$, definite da

   $$\gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}}, \qquad \Gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{i}} - \sin(t)\vec{\mathbf{j}}.$$

   Allora Γ è una riparametrizzata di γ ~~VERO~~ FALSO

   (c) La serie (di Fourier) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{1+n^2}$ converge puntualmente a una funzione continua ~~VERO~~ FALSO

   (d) Sia $B := \{(x,y,z) \, : \, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ e sia $\vec{f} : B \to \mathbb{R}^3$ un campo **irrotazionale**. Allora $\vec{f}$ è conservativo ~~VERO~~ FALSO.

5. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si scriva la definizione di convergenza uniforme su A di (f_n) ad f (3p.).

   Enunciato $f_n \to f$ UNIF su A $\Leftrightarrow$

   $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$ OPPURE $\left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \ge \bar{n}, \forall x \in A \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right]$

   ε non dipende da x

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 1 febbrario 2020 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 3x^4 + 12x^2y - 4y^3 + 3y^4$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f DIVERSI DA $(0, 0)$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

   $(x, y) = \boxed{(\sqrt{2}, -1)}$ punto di MINIMO $(x, y) = \boxed{(-\sqrt{2}, -1)}$ punto di MINIMO

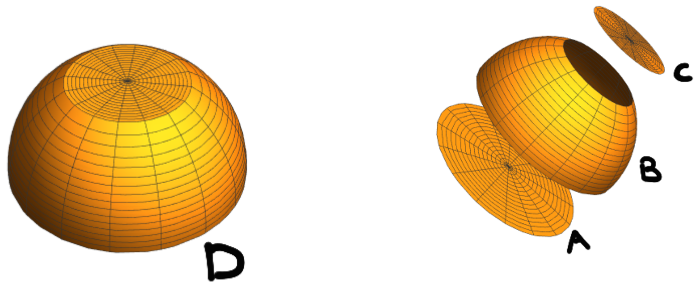
   $(x, y) = \boxed{(0, 1)}$ punto di MINIMO $(x, y) = \boxed{}$ punto di ______

   (b) Si dica MOTIVANDOLO se f ammette minimo su $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo lo si calcoli (3p.)

   $$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \boxed{-5} \quad \boxed{\text{non esiste}}.$$

Svolgimento

2. Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4, 0 \le x \le \sqrt{3}\}$. D è un dominio regolare (a tratti):



In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera ∂D scomposta nelle tre superfici regolari A, B e C su cui consideriamo la normale $\hat{\nu}$ unitaria uscente da D. Sia anche $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := x(y^2+z^2)\vec{\mathbf{i}} + y(x^2+z^2)\vec{\mathbf{j}} + z(x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente A, B e C (0,5 p. a domanda)

$A = \{ \; x=0 \quad y^2+z^2 \le 4 \; \}$

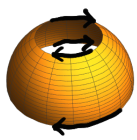
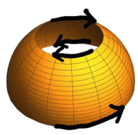
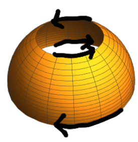
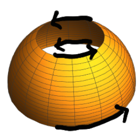
$B = \{ \; , \; x^2+y^2+z^2=4 \quad 0 \le x \le \sqrt{3} \; \}$

$C = \{ \; \{ x=\sqrt{3} \quad y^2+z^2 \le 1 \} \; \}$

(b) Si calcoli $\hat{\nu}$ nei punti $P_0 = (0,1,-1)$ e $P_1 = \left(1,-1,\sqrt{2}\right)$ (0,5+0,5p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{1}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}}$ $\qquad$ $\hat{\nu}(P_1) = \boxed{1/2}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-1/2}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{\sqrt{2}/2}\,\vec{\mathbf{k}}$

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta l'orientazione di $\Sigma(B)$ coerente con $\hat{\nu}$ (0,5p.):

 ☐  ☒  ☐  ☐

(d) Si calcolino, mostrando i passaggi principali, i seguenti flussi, ($\hat{\nu}$ è sempre quella sopra).

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \frac{41\sqrt{3}\pi}{5} \qquad \text{(3 p.)}$$

$$\iint_{B} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \frac{137\sqrt{3}\pi}{10} \qquad \text{(2 p.)}$$

Svolgimento delle parte (d)

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$xy'' + (2x - 3)y' - 10y = 80x$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (2p.):

$(\mathcal{R})$ $\boxed{}$

(b) Si dica, giustificando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e se è unica (1p.).

esiste unica   esiste non unica   non esiste

(c) Si mostri che, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione ha un'unica soluzione soluzione tale che $y^{(4)}(0) = \alpha$; si trovi il raggio di convergenza (della serie che definisce y) nel caso $\alpha = 1$ (1p.):

$$R = \boxed{}.$$

(d) Si trovi esplicitamente la soluzione y tale che $\alpha = y^{(4)}(0) = 120$ (2p.).

$$y(x) = \boxed{}$$

Svolgimento

4. $\left(\boxed{} \text{ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16} \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -2x - 4y + 4z \\ y' &= 3y - z \\ z' &= y + z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebrica e geometrica (2p.):

$$\lambda_1 = \boxed{}, \; m_A = \boxed{}, \; m_G = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \; m_A = \boxed{}, \; m_G = \boxed{}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(2p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 1$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{}$$

$$y(t) = \boxed{}$$

$$z(t) = \boxed{}$$

Svolgimento

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n = f(x)$

(a) RAGGIO : $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ ← CONVIENE USA CESARO

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}\, n^n}{\cancel{n!}\,(n+1)^{\cancel{n+1}\,n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = \boxed{e}$$

(b) $f''(0)$. Come noto se $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \Leftrightarrow f''(0) = 2a_2 = 2\,\frac{2!}{2^2} = \frac{2\cdot 2}{4} = 1$$

2. $G(x,y,z) = e^{x-y+2z} - xyz$ $\quad M = \{G(x,y,z) = 1\}$

2.a quali in M? $(0,1,1)$ $(1,0,1)$ $(1,1,0)$ $(1,1,1)$

2.b $P_0 =$ punto sopra . M è grafo $z = f(x,y)$ vicino a P_0 !?

2.c $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = ?$

2a. Provo a mettere i vari punti in G $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{lll} G(0,1,1) = e^{0-1+2} - 0 = e^{1} \neq 1 & & \text{NO} \\ G(1,0,1) = e^{1-0+2} - 0 = e \neq 1 & & \text{NO} \\ G(1,1,0) = e^{1-1-0} - 0 = 1 & & \text{OK} \\ G(1,1,1) = e^{1-1+2} - 1 = e-1 \neq 1 & & \text{NO} \end{array}\right\} P_0 = (1,1,0)$$

2b. Per verificare se $\exists f$ scrivo $\nabla G = \begin{bmatrix} e^{x-y+2z} - yz \\ -e^{x-y+2z} - xz \\ 2e^{x-y+2z} - xy \end{bmatrix}$

$$\nabla G(P_0) = \nabla G(1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per applicare Dini e trovare $z = f(x,y)$ (vicino a $(1,1)$)

deve essere $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) \neq 0 \Leftarrow$ è $1 \neq 0$ TORNA

2.c. Uso la formula $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{\partial G}{\partial y}(P_0) \Big/ \frac{\partial G}{\partial z}(P_0) = -\frac{-1}{1} = 1$

3. $\Omega = \{ y > x \}$ $\quad \vec{f}(x,y) = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{(x-y)^2}$. Potenziale ? Ω

Ω è CONVESSO $\Rightarrow$ Ω è semplicemente connesso

Vediamo se $\vec{f}$ è irrotazionale $\quad \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{(x-y)^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x-y)^2} =$

$$- \frac{-2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} - \frac{-2(x-y)(+1)}{(x-y)^4} = 2\,\frac{-(x-y)+(x-y)}{(x-y)^4} = 0$$

$\Rightarrow$ f È CONSERVATIVO (su Ω irrotazionale $\Leftrightarrow$ CONSERVATIVO

Per risolvere l'esercizio basta $\searrow$

Cerco $U(x,y)$: $\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{(x-y)^2} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{(x-y)^2}$

$$U = \int \frac{dx}{(x-y)^2} = \int (x-y)^{-2}\,dx = -(x-y)^{-1} + c(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{(x-y)} + c(y)\right) = - \frac{-(-1)}{(x-y)^2} + c'(y) = \frac{-1}{(x-y)^2} + c'(y)$$

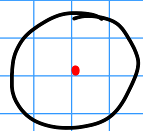
deve essere $\frac{-1}{(x-y)^2}$ $\Leftrightarrow$ c = costante

HO TROVATO $U(x,y) = \frac{-1}{(x-y)}$ + costante

4. 4.a $A = \{ 0 \le x^2+y^2 \le 1 \}$ $\quad B = \{ x^2+y^2 = 0\} \cup \{x^2+y^2=1\}$

$\partial A = B$??

A coincide con $\{x^2+y^2 \le 1\}$ =



$\Rightarrow \partial A = \{x^2+y^2=1\} \neq B$

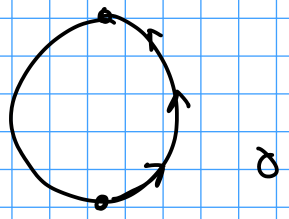
Come mai è falso $\partial\{G_1 \le 0,\ G_2 \le 0\} =$
$\{G_1 = 0,\ G_2 \le 0\} \cup \{G_1 \le 0,\ G_2 = 0\}$??

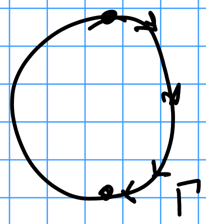
$G_1(x,y) = -x^2-y^2$, $G_2(x,y) = x^2+y^2-1$ $\quad$ G_1 NON È REGOLARE $\nabla G_1 = 0$ in $G_1 = 0$

4.b. $\gamma, \Gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$, $\quad \Gamma(t) = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$

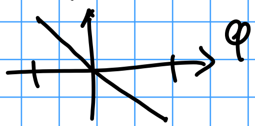
γ è riparametrizzata di Γ ??





- SOSTEGNO = $\{x^2+y^2=1,\ x\ge 0\}$
- VERSO OPPOSTO
- $\Gamma(t)=\gamma(-t)$

$\varphi(t)=-t$ va da $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ biiettiva



SÌ Γ è una riparametrizzazione di γ e $\varphi(t)=-t$ è il cambio di parametro

4.c $\sum_{n=1} \frac{1}{1+n^2}\cos(2nt)$ conv. puntualmente a una f continua !!

SÌ Anzi converge UNIFORMEMENTE dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}<+\infty$$

(se ho $\underbrace{\sum a_n\cos(n\omega t)}_{(A)}$ e $\sum |a_n|<+\infty$ $\Rightarrow$ CONV. UNIF. di (A) $\Rightarrow$ SOMMA è continua)

4.d $\vec{f} : \{x^2+y^2+z^2<1\}$ IRROTAZIONALE.

f è conservativo ?!

SÌ perché $\{x^2+y^2+z^2<1\}$ è CONVESSO (stellato rispetto a (0,0,0))

5. Def di conv. uniforme per $f, f_n : A\to\mathbb{R}$ $(A\subset\mathbb{R}^n)$

PARTE B

(1) $f(x,y)=3x^4+12x^2y-4y^3+3y^4$

(a) cerco i punti stazionari (DIVERSI DA (0,0))

$$\frac{\partial f}{\partial x}=12x^3+24xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=12x^2-12y^2+12y^3$$

$$\nabla f=0 \iff \begin{cases} 12x(x^2+2y)=0 \\ x^2=y^2-y^3 \end{cases}$$ ← $x=0$ oppure $x^2=-2y$

$\boxed{x=0}$ $\quad 0=y^2-y^3 \iff y^2(1-y)=0 \iff \begin{cases} y=0 \\ y=1\end{cases}$ $\quad \boxed{\begin{matrix}(0,0)\\(0,1)\end{matrix}}$

$x^2 = -2y \qquad 0 = 2y + y^2 - y^3 \quad \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ GIA' TROVATO} \\ 2 + y - y^2 \Rightarrow y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \end{cases}$

TROVO $y = \dfrac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 & x^2 = -4 \text{ NO} \\ -1 & x^2 = 2 \quad x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

altri due punti $(\sqrt{2}, -1) \quad (-\sqrt{2}, -1)$

CALCOLO LE DERIVATE SECONDE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 36x^2 + 24y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -24y + 36y^2$$

$$H_f(\pm\sqrt{2}, -1) = \begin{bmatrix} 36 \cdot 2 - 24 & -24\sqrt{2} \\ -24\sqrt{2} & 24 + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & -24\sqrt{2} \\ -24\sqrt{2} & 60 \end{bmatrix}$$

$$= 12 \begin{bmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix} \qquad \det = 12^2(20 - 8) > 0$$

$\boxed{\text{MINIMI}}$

$$H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -24+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \det > 0$$

MINIMO

Se calcolo $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← NON MI DICE NULLA

(2) MINIMO SU $\mathbb{R}^2$?? (e calcolarli)

Cosa fa f all'infinito. VORREI CHE $f(x,y) \to +\infty$ $\|(x,y)\| \to \infty$

(ricordo che se $\|(x,y)\| \to \infty$ almeno uno tra $|x|$ e $|y|$ diverge a $+\infty$)

$$f(x,y) = 3x^4 + 3y^4 + 12x^2y - 4y^3 =$$
$$3x^4 + 12x^2y + \underbrace{3y^4 - 4y^3}_{\text{diverge se } |y| \to +\infty}$$

uso $\quad 12x^2y = (2x^2)(6y) \leq \frac{4x^4}{2} + \frac{36y^2}{2} = 2x^4 + 18y^2$

$$f(x,y) \geq \underbrace{3x^4 - 2x^4}_{g(x)} + \underbrace{-18y^2 + y^4 - 4y^3}_{h(y)}$$

ho che $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{|y|\to+\infty} h(y) = +\infty$

e $\quad g(x) \geq$ costante $\qquad h(y) \geq$ costante

(sono continue e divergono a $+\infty$ se $|x| \to \infty$ / $|y| \to \infty$)

$\Rightarrow$ se $\|(x,y)\| \to \infty$ $\left\langle \begin{array}{ll} |x| \to \infty & f(x,y) \to \infty \\ |y| \to \infty & f(x,y) \to \infty \end{array}\right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{DUNQUE } \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty \\ f \text{ è continua} \end{array} \right. \Rightarrow f$ ha minimo

PUNTO DI MINIMO È CRITICO $\Rightarrow$ è uno di quelli sopra

$$f(\pm\sqrt{2}, -1) = 3\cdot 4 + 12\cdot 2\cdot(-1) - 4(-1)^3 + 3 =$$
$$12 - 24 + 4 + 3 = -12 + 7 = -5$$

MINIMO

$$f(0,1) = -4 + 3 = -1$$

COSA SUCCEDE VICINO AL PUNTO (0,0)

– CERCO DI DESCRIVERE L'INSIEME $\{f = 0\}$

$$3x^4 + 12x^2y - 4y^3 + 3y^4 = 0$$

$t = x^2 \qquad 3t^2 + 12yt - 4y^3 + 3y^4 = 0$

$$t = \frac{-6y \pm \sqrt{36y^2 - 3(-4y^3+3y^4)}}{3} =$$

$$\frac{-6y \pm 6|y|\sqrt{1+\frac{12}{36}y - \frac{9}{36}y^2}}{3} =$$

$$-4y \pm 4|y|\sqrt{1+\frac{y}{3}-\frac{y^2}{4}} =$$

$$-4y\left(1 \pm \sqrt{1+y/3-y^2/4}\right) = \varphi^+(y)/\varphi^-(y)$$

(quando y attraversa lo zero cambia i segni)

LA RADICE HA SENSO PERCHÉ VICINO A ZERO l'argomento è $\simeq 1 > 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 &= \varphi^+(y) \\ x^2 &= \varphi^-(y) \end{aligned}}$$

INOLTRE, se $y \simeq 0$,

$$\varphi^+(y) = -4y\left(1+1+\frac{y}{6}+o(y)\right)$$

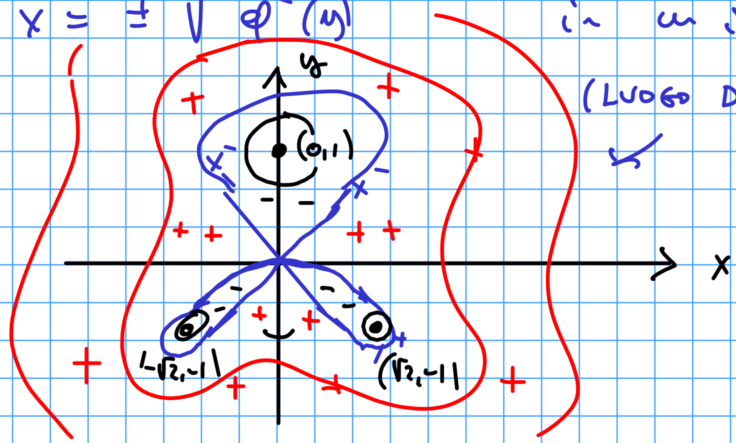
$$\varphi^-(y) = -4y\left(\cancel{1}-\cancel{1}-\frac{y}{6}+o(y)\right)$$

$\varphi^+(y) \simeq -8y + o(y)$ ← positiva $y<0$ ($y \simeq 0$)

$\varphi^-(y) \simeq \frac{2}{3}y^2 + o(y)$ ← POSITIVA $y \simeq 0$

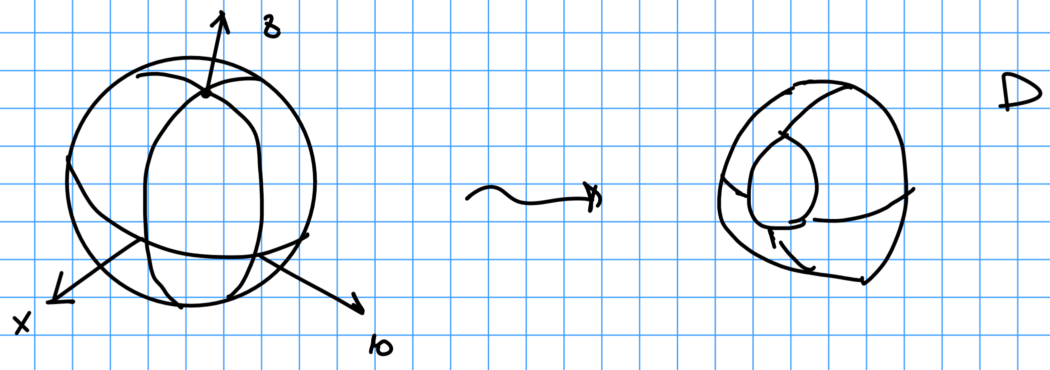
$x^+(y) = x = \pm\sqrt{\varphi^+(y)}$ in un intorno sinistro di $y=0$ ($\varphi^+ > \varphi^-$)

$x^-(y) = x = \pm\sqrt{\varphi^-(y)}$ in un intorno di $y=0$

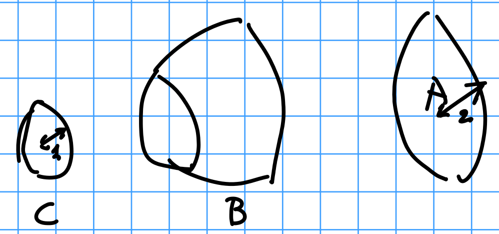


(LUOGO DEGLI ZERI DI f, vicino a (0,1)) ✓

(2.) $D = \{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 0 \le x \le \sqrt{3}\}$



$\partial D =$

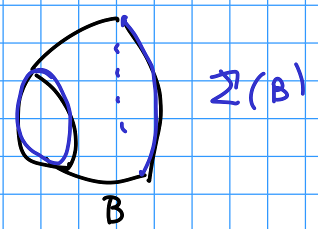


(a) $C = \{\, x = \sqrt{3},\ x^2+y^2+z^2 \le 4 \,\} = \{\, x=\sqrt{3}\ \ y^2+z^2 \le 1 \,\}$

$B = \{\, 0 \le x \le \sqrt{3},\ x^2+y^2+z^2 = 4 \,\}$

$A = \{\, x = 0\ \ y^2+z^2 \le 4$

<u>oss.</u> $\Sigma(B) = \{\, x=0,\ y^2+z^2=4 \,\} \cup \{\, x=\sqrt{3},\ y^2+z^2=1 \,\}$



$\boxed{G_1 = -x}$ $\qquad G_2 = x^2+y^2+z^2-1 \qquad G_3 = x-\sqrt{3}$

$D: \{\, G_1 \le 0,\ G_2 \le 0,\ G_3 \le 0 \,\}$ $\qquad$ (G_i regolari)

(b) calcolo $\hat{\nu}$ (uscente da D) in $P_0 = (0,1,-1)$, $P_1(1,-1,\sqrt{2})$

$P_0 \in A$, $P_0 \notin \Sigma(A)$ perché $x=0$ $\quad y^2+z^2 = 2 < 4$ $\quad (A \setminus \Sigma(A))$

$G_1(P_0) = 0 \qquad \hat{\nu}(P_0) = \dfrac{\nabla G_1}{\|\nabla G_1\|}(P_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{\nu}(P_0)$

$P_1 \in B \qquad G_2(P_1) = 0$ infatti $1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2 = 4$

$P_1 \notin \Sigma(B) \qquad 0 < 1 < \sqrt{3}$

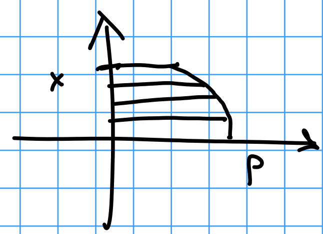
$\nu(P_1) = \dfrac{\nabla G_2}{\|\nabla G_1\|}(P_1) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Bigg| = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

(3.d) $\Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f} =$

$$\iiint_D \left((y^2+z^2) + (x^2+z^2) + (x^2+y^2) \right) dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_D 2\,\|(x,y,z)\|^2 \,dx\,dy\,dz =$$ coordinate cilindriche rispetto all'asse

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$



$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+\rho^2)\,\rho\,d\rho$$

$\rho = \sqrt{y^2+z^2}$

$x^2+\rho^2 \le 4$

$$4\pi \int_0^{\sqrt{3}} dx \left[\frac{x^2\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$4\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2(4-x^2)}{2} + \frac{(4-x^2)^2}{4} \right) dx = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4-x^2)(2x^2+4-x^2)\,dx$$

$$\pi \int_0^{\sqrt{3}} (4-x^2)(4+x^2)\,dx = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (16-x^4)\,dx = \pi \left[16x - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$\pi\sqrt{3}\left(16 - \frac{(\sqrt{3})^4}{5} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{5}(80-9) = \frac{71\sqrt{3}\,\pi}{5}$$

(d.2) $\Phi(\vec{f}, B, \hat{\nu}) = \Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) - \Phi(f, A, \hat{\nu}) - \Phi(f, C, \hat{\nu})$

su A $\hat{\nu} = -\vec{i}$

$$\Phi(\vec{f}, A, \hat{\nu}) = \iint_{y^2+z^2\le 4} \underbrace{-f_1(0,y,z)}_{=0}\,dy\,dz = 0$$

$f_1(x,y,z) = x(y^2+z^2)$ se $x=0$ viene zero

su C $\hat{\nu} = \vec{i}$

$$\Phi(\vec{f}, C, \hat{\nu}) = \iint_{y^2+z^2\le 1} f_1(\sqrt{3}, y, z)\,dy\,dz = \iint_{y^2+z^2\le 1} \sqrt{3}(y^2+z^2)\,dy\,dz =$$

$$2\pi\sqrt{3} \int_0^1 \rho^2\,\rho\,d\rho = 2\pi\sqrt{3}\left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{g}, B, \hat{u}) = \left(\frac{71\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\hat{\pi} = \frac{142 - 5}{10}\sqrt{3}\pi = \frac{137\sqrt{3}\pi}{10}$$