Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 69 20/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

$$\begin{cases} x' = x - 4z \\ y' = -4x + 3y + 8z \\ z' = 2x - y - 5z \end{cases} \quad \text{con condizioni iniziali} \quad \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

cerchiamo la forma di Jordan di A

- polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -4 \\ -4 & 3-\lambda & 8 \\ 2 & -1 & -5-\lambda \end{bmatrix} =$

$$(1-\lambda)\Big(-(3-\lambda)(5+\lambda) + 8\Big) - 4\Big(4 - 2(3-\lambda)\Big) =$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 + 2\lambda - 7\right) - 16 + 24 - 8\lambda =$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 7 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda + 8 - 8\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 =$$

$$(\lambda+1)(-\lambda^2+1) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1).$$

DUE AUTOVALORI $\lambda_1 = -1$ $m_A = 2$ / $\lambda_2 = 1$ $m_A = 1$

- $\lambda = -1$ $\quad B = B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

rango $B_1 = \boxed{2}$ $\Rightarrow$ Ker B_1 ha dimensione $3-2 = 1$ $\quad m_G(-1) = 1$

UN BLOCCO $J_2(-1)$ ($\Rightarrow$ B_1^2 ha Ker di dim 2, dim Ker $B_1^K = 2$ $\forall K \geq 2$)

Mi servono e_1 e_2 con $B_1 e_2 = e_1 \neq 0$ $\quad Be_1 = 0$ (e_1 autovettore)

Posso partire cercando $\boxed{e_2 \in \text{Ker } B_1^2 \setminus \text{Ker } B}$ $\quad (B_1^2 e_2 = 0,\ B_1 e_2 \neq 0)$

$$B_1^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}}_{B_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ok}$$

B_1

$e_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \text{Ker } B_1^2 \iff \boxed{x = y + 2z}$

$$0 \neq B_1 e_2 = \begin{bmatrix} 2x - 4z \\ -4x + 4y + 8z \\ 2x - y - 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ 0 \\ y \end{bmatrix}$$

$z = 0$
$y = 1$
$x = 1$

$e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad Be_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =: e_1$ $\qquad$ (e_1 è un autovettore $Be_1 = B_1^2 e_2 = 0$)

$\lambda = 1$ $\qquad$ mi serve $e_3 \in$ Ker $A - I$ $\qquad e_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}}_{B_2 = A - I} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 2x \end{array}$$

$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

DUNQUE

$$M = [\, e_1 \;\; e_2 \,|\, e_3 \,] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

dovrei calcolare M^{-1} per trovare e^{tA}

però posso notare che $Y_0 = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = e_2$ QUINDI

dato che $M = [\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, e_3 \,] \Rightarrow M \hat{e}_2 = e_2 \quad \left(\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

$\Leftrightarrow \quad M^{-1} e_2 = \hat{e}_2$ (senza dover calcolare M^{-1})

$$Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} \hat{e}_2 =$$

$$M \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = (2t+1)e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = te^{-t} \end{cases}$$

se $t=0$ trovo $x(0)=1$ $y(0)=1$ $z(0)=0$

TORNA

VERIFICHIAMO CHE VALE L'EQUAZIONE

$x'(t) = (-2t-1+2)e^{-t} = (-2t+1)e^{-t}$ ←

$y'(t) = -e^{-t}$ ←

$z'(t) = (-t+1)e^{-t}$

$$x(t) - 4z(t) = (2t+1-4t)e^{-t} = (-2t+1)e^{-t} = x'(t)$$

$$-4x(t) + 3y(t) + 8z(t) = (-8t-4+3+8t)e^{-t} = -te^{-t} = y'(t)$$

$$2x(t) - y(t) - 5z(t) = (4t+2-1-5t)e^{-t} = (-t+1)e^{-t} = z'(t)$$

TORNA

CALCOLIAMO $e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1}$

MI SERVE $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ $\quad$ det$(M) = 1$

$$\text{cof}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = M^{-1}$$

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2te^{-t} & -te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} & -4e^{-t} \\ -e^{t} & e^{t} & 2e^{t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4te^{-t} + 2e^{-t} - e^{t} & -2te^{-t} - e^{-t} + e^{t} & 2e^{-t} - 12te^{-t} + 2e^{t} \\ 2e^{-t} - 2e^{t} & -e^{-t} + 2e^{t} & -4e^{-t} + 4e^{t} \\ 2te^{-t} & -te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \end{bmatrix}$$

se questo è giusto ritrovo la sol di prima facendo

$$e^{tA}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-t} \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} \leftarrow \text{quella di prima}$$