Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 68 19/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

ESERCIZIO Sia A la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = 3x - 4y + 4z + b_1(t) \\ y' = 2x - 4y + 5z + b_2(t) \\ z' = x - 3y + 4z + b_3(t) \end{cases}$$

Cerco la forma di Jordan per A.

- Polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ 2 & -4-\lambda & 5 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -(3-\lambda)(4+\lambda)(4-\lambda) - 20 - 24 + (3-\lambda)15 + (4+\lambda)4 + (4-\lambda)8 =$$

$$-(3-\lambda)(16-\lambda^2) - 44 + 45 - 15\lambda + 16 + 4\lambda + 32 - 8\lambda =$$

$$-(48 - 16\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3) + 49 - 19\lambda =$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 = (1-\lambda)^3$$

UNICO AUTOVALORE $\lambda = 1$ $m_A = 3$

• $$B = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$ $-2 = \det \neq 0$

ho rango 2 $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} B = 1$

• ESISTE SOLO UN AUTOVETTORE (a meno di multipli) $\Rightarrow m_G = 1$. Dunque devo trovare una sequenza

$e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ t.c.

$Be_3 = e_2 \quad Be_2 = e_1 \quad Be_1 = 0$ (e_1 è autovettore)

Se trovo e_1, e_2, e_3 e pongo $M = [e_1 | e_2 | e_3] \Rightarrow$

$$A = M J M^{-1} \quad \text{con } J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare $e_1\ e_2\ e_3$ il metodo canonico è

① calcolo $B^2 =$ (deve avere rango 1, $\dim \operatorname{Ker} B^2 = 2$, $\underline{\underline{B^3 = 0}}$)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$ (ho rango 1)

② Trovo $e_3 \in \underbrace{\operatorname{Ker} B^3}_{\mathbb{R}^3} \setminus \operatorname{Ker} B^2 \simeq e_3 \in \mathbb{R}^3$ con $B^2 e_3 \neq 0$

Per esempio $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0$

$= e_1$

e poi $e_2 = Be_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad (e_1 = Be_2 = B^2 e_3)$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Calcoliamo M^{-1}

$$M^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det M}_{1}} \operatorname{cof} M^t = \operatorname{cof}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

• Calcoliamo e^{tA}

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} = e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} =$$

$$e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = e^t M \begin{bmatrix} t^2/2 & 1+t-t^2 & -2-t+t^2 \\ t & 1-2t & -1+2t \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$e^t \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2/2 & 1+t-t^2 & -2-t+t^2 \\ t & 1-2t & -1+2t \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$e^t \begin{bmatrix} 2t+1 & -4t & 4t \\ -t^2/2+2t & 1-5t+t^2 & 5t-t^2 \\ -t^2/2+t & -3t+t^2 & 1+3t-t^2 \end{bmatrix}.$$

• Cerchiamo la soluzione Y di $Y' = AY$ con dato iniziale $x(0)=1$ $\quad y(0)=z(0)=0$ $\quad Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad (= e_1 !!)$

Applico la formula:

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 = e^t \begin{bmatrix} 2t+1 & -4t & 4t \\ -t^2/2+2t & 1-5t+t^2 & 5t-t^2 \\ -t^2/2+t & -3t+t^2 & 1+3t-t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} 2t+1 \\ -t^2/2+2t \\ -t^2/2+t \end{bmatrix} =$$

VERIFICA

$\leftarrow t=0$ TROVO $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Y'(t) = e^t \begin{bmatrix} 2t+1 \\ -t^2/2 + 2t \\ -t^2/2 + t \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -t+2 \\ -t+1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2t+3 \\ -t^2/2 + t + 2 \\ -t^2/2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$A\,Y(t) = e^t \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t+1 \\ -t^2/2 + 2t \\ -t^2/2 + t \end{bmatrix} =$$

$$e^t \begin{bmatrix} 6t+3 + \cancel{2t^2} - 8t - \cancel{2t^2} + 4t \\ 4t+2 + 2t^2 - 8t - 5t^2/2 + 5t \\ 2t+1 + 3t^2/2 - 6t - 2t^2 + 4t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2t+3 \\ -t^2/2 + t + 2 \\ -t^2/2 + 1 \end{bmatrix}$$

TORNA

OSS RIGUARDO ALLA RICERCA DI e_1 e_2 e_3

IN QUESTO CASO C'È UNA UNICO e_1 (a meno di multipli)

e cioè

$$e_1 \in \operatorname{Ker} B \iff \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 0 \\ y = z \end{cases} \qquad \begin{cases} y = z \\ 2x = 0 \end{cases} \qquad \text{per es. } e_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

· cerco $e_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $B e_2 = e_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - \cancel{4y} + \cancel{4y} + 4 = 0 \\ z = y+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ z = y+1 \end{cases}$$

per es. $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$

Cerco e_3 con $B e_3 = e_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = -2 \\ y - z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - \cancel{4z} + 8 + \cancel{4z} = -2 \\ y = z - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$e_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ho un'altro M (e M^{-1})

$A = M J M^{-1}$ J quella di prima

(alla fine e^{tA} deve essere lo stesso)

ESERCIZIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = x - 4y + 4z \\ y' = 2x - 5y + 4z \\ z' = x - 2y + z \end{cases}$$

Forma di Jordan di A

- Polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 & 4 \\ 2 & -5-\lambda & 4 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)^2(5+\lambda) - 16 - 16 + (1-\lambda)8 + (5+\lambda)4 + (1-\lambda)8$$

$$= -(1-2\lambda+\lambda^2)(5+\lambda) - 32 + 8 - 8\lambda + 20 + 4\lambda + 8 - 8\lambda =$$

$$-(5 - 10\lambda + 5\lambda^2 + \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3) + 4 - 12\lambda =$$

$$-(1 + 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3) = -(1+\lambda)^3$$

UNICO AUTOVALORE $\lambda = -1$ $\quad m_A = 3$

- $B = A + I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ rango 1 !! $\quad \dim \operatorname{Ker} = 2$

$m_G = 2$

devo avere due blocchi di Jordan $J_1(-1)$ e $J_2(-1)$.

Per trovare M devo trovare $e_1\ e_2\ e_3$ lin. ind.

$e_1, e_2 \in \operatorname{Ker} B$ $\quad \boxed{Be_3 = e_2}$. IN QUESTO MODO

$M = [e_1, \boxed{e_2, e_3}]$ $\qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(o mettere: $M = [e_2\ e_3 \mid e_1] \Rightarrow J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$)

- Non posso partire dal basso cioè da $e_1\ e_2 \in \operatorname{Ker}(B)$ ← VEDIAMO DOPO
- Noto $\operatorname{Ker} B^2$ ha dim 3 $\Leftrightarrow B^2 = 0$
- CERCO $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2 \setminus \operatorname{Ker} B \Leftrightarrow e_3 \in \mathbb{R}^3$ con $Be_3 \neq 0$

per esempio $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\underset{e_2}{\parallel}}{Be_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$

($Be_3 = e_2$!!, $Be_2 = 0$ e_2 autovettore)

lin indip

- CERCO $e_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} B$, e_1 e e_2 lin. indip.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = e_1 \in \operatorname{Ker} B \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0$

Metto $x = 0$ rimane $y = z$ per esempio $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det M = -1(-1) + 1(-2) = 1 - 2 = (-1 \neq 0)$$

$$M^{-1} = -\operatorname{cof} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & +1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$A = M J M^{-1}$. Facciamo e^{tA}

$$e^{tA} = e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} =$$

$$e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = e^{-t} M \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ t & 1-2t & -1+2t \\ +1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ t & 1-2t & -1+2t \\ +1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 2t+1 & -4t & 4t \\ 2t & 1-4t & 4t \\ t & -2t & 1+2t \end{bmatrix} = e^{tA}$$

VERIFICHIAMO SE

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

$$\frac{d}{dt} = -e^{-t} \begin{bmatrix} 2t+1 & -4t & 4t \\ 2t & 1-4t & 4t \\ t & -2t & 1+2t \end{bmatrix} + e^{t} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} -2t+1 & 4t-4 & -4t+4 \\ -2t+2 & 4t-5 & -4t+4 \\ -t+1 & 2t-2 & -2t+1 \end{bmatrix}$$

$$A(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2t+1 & -4t & 4t \\ 2t & 1-4t & 4t \\ t & -2t & 1+2t \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t}\begin{bmatrix} -2t+1 & 4t-4 & -4t+4 \\ -2t+2 & 4t-5 & -4t+4 \\ -t+1 & 2t-2 & -2t+1 \end{bmatrix}$$

TORNA

VEDIAMO LA SOLUZIONE CON $Y(0) = e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Y(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 2t+1 \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \qquad \left(= M e^{tJ} M^{-1} Y_0 \right)$$

CI SI POTEVA ARRIVARE SENZA CALCOLARE M^{-1}

NOTANDO CHE Y_0 è una colonna di M (LA TERZA)

DUNQUE $Y_0 = e_3 = M\hat{e}_3 = M\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff M^{-1}e_3 = \hat{e}_3$

$$\Rightarrow Y(t) = M e^{tJ}\hat{e}_3 =$$

$$e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t}\begin{bmatrix} 2t+1 \\ 2t \\ t \end{bmatrix}$$

TORNA (è molto più veloce!)

perché Y_0 è MOLTO PARTICOLARE

OSS. PER TROVARE $e_1\ e_2\ e_3$ bisogna partire da e_3

- Se parti da $e_1\ e_2$ rischio di non riuscire a trovare e_3

ESESEMPIO DI PROCEDIMENTO SBAGLIATO .

· Cerco e_1 e_2 $\in \operatorname{Ker} B$

$$e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} B \iff x - 2y + 2z = 0$$

$y = 0 \quad z = 1 \quad x = -2 \qquad \tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

lin. indip

$z = 0 \quad y = 1 \quad x = 2 \qquad \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

OGNI AUTOVALORE e si scrive $\lambda \tilde{e}_1 + \mu \tilde{e}_2$

MI SERVE $\tilde{e}_3$ con $B\tilde{e}_3 = \tilde{e}_1$ / $\tilde{e}_2$ (uno dello due)

$$\tilde{e}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \tilde{e}_1 \ / \ \tilde{e}_2$$

$$\begin{bmatrix} 2x - 4y + 4z \\ 2x - 4y + 4z \\ x - 2y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \quad / \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq$$

NON SI RISOLVE

IN REALTA' PER TROVARE e_1 e_2 e_3 devo trovare

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} = e_2 \in \operatorname{Ker} B$ con $x = y$, cioè

$$\begin{cases} x = y \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = y \\ x = 2z. \end{matrix} \qquad \Rightarrow e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ (\text{quello di prima} \ldots)$$

e_1 . . .