# Claudio Saccon (*)
# Ingegneria Aerospaziale
# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

## Lezione 67 18/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

· Trovare la forma di Jordan di una $A$ $N \times N$

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

ogni $J_i(\lambda_i)$ è un "blocco di Jordan"

$$J_i(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{i} \Big\} i$$

$\lambda_1 \dots \lambda_k$ (eventualmente coincidenti) sono tutti e soli gli autovalori di $A$

so che $\exists$ $M$ invertibile t.c. $\boxed{A = M J M^{-1}}$

ABBIAMO GIÀ DETTO se $\lambda$ è autovalore

$V$. $\Rightarrow m_G = \#J_i(\lambda)$ (con quel $\lambda$!!)

NUMERO DI AUTOV. INDIP. $= \dim(\ker A - \lambda I)$

che compaiono in $J$. $m_A(\lambda) =$ somma delle dimensioni di $J_i(\lambda)$

PER TROVARE LA DECOMPOSIZIONE SI DEVE OPERARE COSÌ:

1. trovo tutti gli autovalori di $A$ (in $\mathbb{C}$)

$\Leftrightarrow$ trovo tutte le radici di $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (grado $N$)

$\lambda_1 \dots \lambda_k$ ognuno con una molteplicità algebrica $m_1 \dots m_k$
t.c. $m_1 + \dots + m_k = N$

FISSIAMO $\lambda$ autovalore e facciamo dei calcoli che poi ripetiamo per gli altri

Calcolo $B = A - \lambda I$ ( $e$ autovettore $\Leftrightarrow$ $e \in \ker B$ )

(**OSS.** $m_G(\lambda) = m_A(\lambda) = m_A$ $\Leftrightarrow$ $\dim \ker B = m_\lambda$).

Se $\underline{\dim \ker B = m}$ $\rightarrow$ trovo $e_1 \dots e_k$ autovettori lin. indip.

( $\Rightarrow$ $m_\lambda$ blocchi di Jordan con autovalore $\lambda$ $\Rightarrow$ tutti di dimensione 1 )

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{matrix}} \end{pmatrix}$ IL CONTRIBUTO DI $\lambda$ è una sottomatrice diagonale

IN GENERALE $m_G(\lambda) < m_A(\lambda)$. Considero le potenze $B^1 - B^2 \cdots B^q$ di $B$

e noto che $\ker B \subset \ker B^2 \subset \dots \subset \ker B^i \subset \ker B^{i+1} \subset \dots$

**FATTO** Esiste $h \leq m_A(\lambda)$ tale che:

$< \quad < \dim \ker (B^{h-1}) < \dim \ker B^h = \dim \ker B^h = m_A(\lambda)$

quando $\dim \ker (B^q) = m_A(\lambda)$ la succ. si stabilizza

$\ker B^i = \ker B^{i+1}$ se $i \geq h$

**INOLTRE** se chiamo $(m_0 = 0)$ $m_i = \dim \ker B^i$ $\overset{0}{\underset{\shortparallel}{m_0}} < m_1 < m_2 < \dots < m_h = m_{h+1} = \dots$

ho anche che $n_i = m_i - m_{i-1}$ $n_i$ è decrescente $n_{i+1} \leq n_i$

$( m_{i+1} - m_i \leq m_i - m_{i-1} )$

SAPENDO QUANTO DETTO SOPRA SI FA COME SEGUE

**PASSO $h$-esimo**

(a) Si prendono $\underbrace{e_1^h \cdots e_{n_h}^h}_{n_h} \in \ker B^h \setminus \ker B^{h-1}$ $\underline{\text{lin. indip.}}$

$\ker B^h$: $\dim m_h = m_A(\lambda)$; $\ker B^{h-1}$: $\dim m_{h-1}$

$m_h - m_{h-1} = n_h$

(b) Considero

$\underbrace{e_1^{h-1} = B e_1^h \quad \cdots \quad e_{n_h}^{h-1} = B e_{n_h}^h}_{n_h} \in \ker B^{h-1} \setminus \ker B^{h-2}$ $\underline{\text{sono lin. indip}}$ (mi fido)

$\ker B^{h-1}$: $\dim m_{h-1}$; $\ker B^{h-2}$: $\dim m_{h-2}$

$m_{h-1} - m_{h-2} = n_{h-1} \geq n_h$

(c) se $n_h < n_{h-1}$ posso trovare altri $e_{n_h+1}^{h-1} \cdots e_{n_{h-1}}^{h-1}$ vettori in

$\ker B^{h-1} \setminus \ker B^{h-2}$ in modo che

$\underbrace{e_1^{h-1} \cdots e_{n_{h-1}}^{h-1}}_{n_{h-1}}$ sono lin. indip in $\ker B^{h-1} \setminus \ker B^{h-2}$

ITERO IL PROCEDIMENTO. ALL PASSO $i$-esimo $2 \le i \le h$

(a) $e_1^i \dots e_{m_i}^i$ elementi indipendenti in $\ker B^i \setminus \ker B^{i-1}$

(b) considero $e_1^{i-1} = B e_1^i \quad \dots \quad e_{m_i}^{i-1} = B e_{m_i}^i \in \ker B^{i-1} \setminus \ker B^{i-2}$

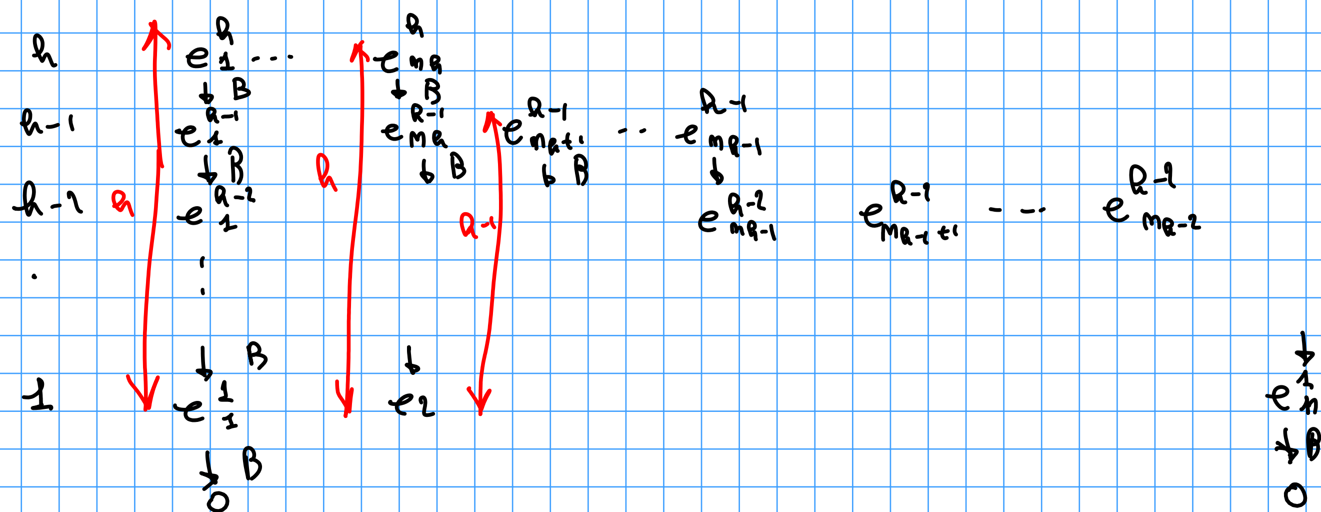
(c) aggiungo ai precedenti eventuali

$e_{m_i+1}^{i-1} \dots e_{m_{i-1}}^{i-1}$ in modo che

$e_1^{i-1} \dots e_{m_{i-1}}^{i-1}$ siano lin. indip in $\ker B^{i-1} \setminus \ker B^{i-2}$

ALLA FINE (PASSO 1) trovo

$e_1^1 \dots e_{m_1}^1$ elementi in $\ker B \setminus \{0\}$ (autovettori)



L'ULTIMA RIGA è fatta di autovettori. OGNUNO DI QUESTI AUTOVETTORI HA "UNA CATENA" di vettori che si ottiene dall'elemento più in alto $e$: $e, Be, B^2 \dots B^i e$ = autovettore

OGNI COLONNA di questo diagramma mi da un blocco di Jordan di lunghezza $r$ = altezza della colonna

HO DUNQUE TROVATO $m_G(\lambda)$ sequenze del tipo

$$\underset{\in \ker B^r}{e}, Be, B^2 e, \dots, \underset{\in \ker B \setminus \{0\}}{B^{r-1} e} \quad \text{con } r \le h \le m_A(\lambda)$$

OGNUNA DI QUESTE SEQUENZE PRODUCE UN BLOCCO DI JORDAN $J_r(\lambda)$.

$$\Rightarrow J(\lambda) = \left.\begin{bmatrix} J_{r_1} & & & \\ & J_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_{m_g}} \end{bmatrix}\right\} m_A(\lambda) \qquad r_1 + \dots + r_{m_g} = m_A$$

- COME TROVO M ?? . Considero la matrice M avente come colonne i vettori che formano la sequenza delle sopra, ordinate a partire dal basso (dall'autovettore

Se per esempio ho

$$\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & \\ \downarrow & & & \\ Be_1 & Be_2 & & \\ \downarrow & & & \\ B^2e_1 & B^2e_2 & e_3 & \\ \downarrow & & & \\ B^3e_1 & B^2e & Be_3 & e_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

quindi autovettori:
due sequenze di lunghezza 4
1 sequenza di lunghezza 2
1 sequenza di lunghezza 1

$m_A(\lambda) = 11$

$J_\lambda = 11 \times 11$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

$$M_\lambda = \left[ B^3e_1, B^2e_1, Be_1, e_1, B^3e_1, B^2e_2, Be_2, e_2, Be_3, e_3, e_4 \right] \} n$$

SI RIPETE TUTTO PER OGNI $\lambda$

e la M finale $= [M_{\lambda_1} \; M_{\lambda_2} \cdots M_{\lambda_k}]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & -9 & -3 \\ 6 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 4 \times 4$$

- polinomio caratt.

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)\det\begin{bmatrix} 7-\lambda & -9 \\ 4 & -5-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(-35+5\lambda-7\lambda+\lambda^2+36) =$$

$$(1-\lambda)^2(1-2\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)^4$$

$\lambda = 1$ UNICO AUTOVALORE $m_A = 4$

- $$B = A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & -9 & -3 \\ 6 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{rango} = 2}$

rango = 3 ?! NO

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} =$$

$(-18-24-36-(-18-24-36)) = 0$ !!

$\dim \operatorname{Ker} B = 4 - \text{rango}(B) = \boxed{2}$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & -9 & -3 \\ 6 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & -9 & -3 \\ 6 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker} B^2 = 3$

$B^3 = 0$ ( perché $\dim \operatorname{Ker} B^3 > 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B^3 = 4 \Rightarrow B^3 = 0$ )

$\dim(\operatorname{Ker} B) = 2 \quad \dim(\operatorname{Ker} B^2) = 3 \quad \dim(\operatorname{Ker} B^3) = 4$

$m_0 = 0 \quad m_1 = 2 \quad m_2 = 3 \quad m_3 = 4$

$n_1 = 2 \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 1$ (decresce)

- devo trovare $e \in \underbrace{\operatorname{Ker} B^3}_{\mathbb{R}^4} \setminus \operatorname{Ker} B^2 \iff e \in \mathbb{R}^4 \quad B^2 e \neq 0$

POSSO PRENDERE $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 e = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• Poi prendo

$$Be = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B^2 e = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ho una sequenza lunga 3 $\quad e_1 = B^2 e = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = Be = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$e_1 \in \ker B \setminus \{0\}$
$e_2 \in \ker B^2 \setminus \ker B$
$e_3 \in \ker B^3 \setminus \ker B^2$

esiste $e_4 \in \ker B$ con $e_1\ e_4$ lin. indip

$$e_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y + 2w + z = 0 \\ 6y - 9w - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + 2w + z = 0 \\ 3w + 3z = 0 \end{cases}$$

$z = -w$
$y = 2w + z$

Prendo $x = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4$

• Costruisco $M = \left[\begin{array}{ccc|c} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}\right] \Rightarrow J \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

• Calcolo $e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1}$

$$e^{tJ} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ} = \frac{e^t}{8} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\frac{e^t}{8} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4t^2 & 1+2t-6t^2 & 1+2t-2t^2 \\ 0 & 8t & 2-12t & 2-4t \\ 0 & 8 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{8} \begin{bmatrix} 8 & -8t+8t^2 & 16t-12t^2 & 8t-4t^2 \\ 0 & 8+48t & -72t & -24t \\ 0 & 32t & 8-48t & -16t \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = e^{tA}$$

$$\begin{cases} x' = x - y + 2w + z \\ y' = 7y - 9w - 3z \\ w' = 4y - 5w - 2z \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} X(0) = 1 \\ y(0) = w(0) = z(0) = 0 \end{matrix}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \Rightarrow Y(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FACILE

Stesso problema con $x(0)=0 \quad y(0)=1 \quad w(0)=0 \quad z(0)=0$

$$Y(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{e^t}{8} \begin{bmatrix} -8t+8t^2 \\ 8+48t \\ 32t \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} -t+t^2 \\ 1+6t \\ 4t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^t(t^2-t) \quad y(t) = e^t(6t+1) \quad w(t) = 4te^t \quad z(t) = 0$$

VERIFICA

$$x'(t) = e^{t}(t^2 - t + 2t - 1) = e^{t}(t^2 + t - 1) \leftarrow$$

$$y'(t) = e^{t}(6t + 1 + 6) = e^{t}(6t + 7) \leftarrow$$

$$w'(t) = e^{t}(4t + 4) \leftarrow$$

TORNA

$$x(t) - y(t) + 2w(t) = e^{t}(t^2 - t - 6t - 1 + 8t) = e^{t}(t^2 + t - 1) = x'(t)$$

$$7y(t) - 9w(t) = e^{t}(42t + 7 - 36t) = e^{t}(6t + 7) = y'(t)$$

$$4y(t) - 5w(t) = e^{t}(24t + 4 - 20t) = e^{t}(4t + 4) = w'(t)$$