Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 65 12/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

EQ. (SISTEMI DI EQ.) DIFFERENZIALI LINEARI :

$$Y' = A(t)Y + B(t)$$

con $A(t)$ costante quindi

(E.L) $$Y' = AY + B(t)$$

dove A è una matrice $N \times N$ (che dunque non dipende da t) mentre $B : I \to \mathbb{R}^N$ è continua ($I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo)

in particolare ho il caso omogeneo

(E.L.O) $$Y' = AY$$

Il caso omogeneo ammette una "base di soluzioni" $Y_1 \dots Y_N$ soluzioni di (E.L.O) $Y_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. MI PIACEREBBE TROVARE ESPLICITAMENTE $Y_1 \dots Y_N$ — mi piacerebbe in realtà risolvere in modo esplicito

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

$Y_0 \in \mathbb{R}^N$ assegnato

Def. Data A matrice $N \times N$ ha senso definire l'esponenziale

$$\boxed{e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}}$$

In effetti quello scritto sopra è una serie di matrici,

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k}_{\text{ha senso } \forall n} \leftarrow \text{ha senso il limite !!}$$

La serie in effetti converge perché è assolutamente convergente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}$$

(questo funziona perché le matrici $N \times N$ sono uno spazio vettoriale, con una norma $\|\cdot\|$ tale che lo spazio è completo NO DIM.)

Proprietà Se A e B commutano tra loro $(A \cdot B = B \cdot A)$ $\Rightarrow$

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

Dim. Uso la formula del prodotto alla Cauchy di due serie

(lo posso fare perché le due serie sono assolutamente convergenti!)

$$e^A \cdot e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} B^h =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} A^m \frac{1}{(n-m)!} B^{n-m} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{m!(n-m)!}}_{\binom{n}{m}} A^m B^{n-m} = \text{CONTA CHE } AB=BA$$

$$(A+B)^n = \overbrace{(A+B)\cdots(A+B)}^{n \text{ volte}} =$$

tutti i possibili prodotti – LI VOGLIO RAGGRUPPARE IN BASE ALL'ESPONENTE DI A o B –

se $N=2$ $(A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$

$= A^2 + 2AB + B^2$ se $AB=BA$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n =$$

$$e^{A+B}$$

Proprietà · $e^{0} = I$.

· $t \mapsto e^{tA}$ è derivabile e $\frac{d}{dt} e^{tA} = A \cdot e^{tA}$

IN EFFETTI Posso applicare le proprietà delle serie di potenze

$$\varphi(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n \quad \left(\in \mathbb{R}^{N\times N}\right)$$

converge assolutamente $\forall t$ $\Rightarrow \sum \|\cdot\| \leq \sum \frac{\|A\|^n t^n}{n!} = e^{t\|A\|}$

$$\Rightarrow \varphi \text{ è derivabile e } \varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{1}{n!} t^n A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, t^{n-1} A^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = A e^{tA}$$

La matrice $t \mapsto e^{tA}$ risolve l'eq. diff. (+ cond. iniziale)

$$\begin{cases} M' = A M \\ M(0) = I \end{cases} \qquad M \text{ matrici } N \times N$$

Usando la matrice esponenziale siamo in grado di scrivere la sol. di

$$(P.C.L) \quad \begin{cases} Y' = A Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

La soluzione è data da:

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} \left\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau - t_0)A} B(\tau)\, d\tau \right\}$$

Dimostriamo la formula. Notiamo che

$$Y(t_0) = e^{\overbrace{(t_0-t_0)}^{=0} A} \left\{ Y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau)\, d\tau}_{=0} \right\} = e^{0A} Y_0 = I \cdot Y_0 = Y_0$$

(vale la condizione iniziale)

Calcoliamo la derivata di Y' $\Rightarrow$

$$Y'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} \right) \left\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau)\, d\tau \right\} +$$

$$e^{(t-t_0)A} \frac{d}{dt} \Big(\underset{0}{Y_0} + \int_{t_0}^{t} \underset{\text{integrando}}{e^{-(\tau-t_0)}} B(\tau)\, d\tau \Big) =$$

$$\underbrace{A\, e^{(t-t_0)A} \left\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau-t_0)A} B(\tau)\, d\tau \right\}}_{Y(t)} +$$

$$\underbrace{e^{(t-t_0)A}\, e^{-(t-t_0)}}_{I} B(t) \quad = \quad A Y(t) + B(t)$$

Dunque $Y(t) := e^{(t-t_0)A} \left\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\tau-t_0)} B(\tau)\, d\tau \right\}$ è

soluzione di (P.C.L). Per il teorema di Cauchy essa è

l'unica possibile. HO DIMOSTRATO LA FORMULA #

<u>PROBLEMA</u> Data una matrice A calcolare e^{tA}

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

· <u>Caso semplice</u> <u>A diagonale</u> $A = \text{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = \text{Diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_N}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_N} \end{bmatrix}$$

Infatti se $A = \text{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) \Rightarrow A^n = \text{Diag}(\lambda_1^n \dots \lambda_N^n)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \text{Diag}\left(\underbrace{\sum_0^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!}}, \dots, \sum_0^{\infty} \frac{t^n \lambda_N^n}{n!} \right) =$$

$$\text{Diag}\left(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_N}\right)$$

<u>RISULTATO SEMPLICE</u> Se A è una matrice $N \times N$ e

M è una matrice $N \times N$ invertibile $\Rightarrow$

$$e^{MAM^{-1}} = M e^{A} M^{-1}$$

Infatti

$$e^{MAM^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(MAM^{-1})^n = \sum \frac{1}{n!} M A^n M^{-1} = M\left(\sum \frac{A^n}{n!}\right) M^{-1}$$

$$(MAM^{-1})^n = \underbrace{(MA\cancel{M^{-1}})(\cancel{M}A\cancel{M^{-1}}) \cdots (\cancel{M}AM^{-1})}_{n \text{ VOLTE}} = MA^nM^{-1}$$

DUNQUE se A è diagonalizzabile(*) $\Rightarrow$ $A = MDM^{-1}$ per una opportuna M e per $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_N)$ $\Rightarrow$

$$e^{tA} = M\,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_N t})\,M^{-1}$$

(* per esempio se A è simmetrica)

IN GENERALE SI RICORRE ALLA "FORMA DI JORDAN"

FATTO Se A è una matrice $N \times N$ a componenti in $\mathbb{C}$ esistono M invertibile (a coeff. complessi) e J fatta come spiegato sotto tali che

$$(\star) \qquad A = MJM^{-1}$$

Per dire come è fatto J, andiamo per gradi:

- Chiamo "blocco di Jordan" di lunghezza K e di autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ la matrice

$$J_K(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{K \text{ colonne}} \Big\} K \text{ righe}$$

- La J di cui sopra è fatta così

$$(\star\star) \qquad \begin{bmatrix} J_{K_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{K_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{K_\ell}(\lambda_\ell) \end{bmatrix}$$

- dove $\lambda_1 \ldots \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ (non sono per forza diversi)
- $K_1 + K_2 + \ldots + K_\ell = n$

Per esempio

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} & & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & \boxed{2} & 0 \\ & & & & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \quad (6 \times 6)$$

3 e 2 sono autovalori

$m_A(3) = 4$

$m_A(2) = 2$

$m_G(3) = 2$

$m_G(2) = 2$

$$= \begin{bmatrix} J_2(3) & & & 0 \\ & J_2(3) & & \\ & 0 & J_1(2) & \\ & & & J_1(2) \end{bmatrix}$$

oppure

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & 1 & & 0 & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 3 & 0 & \\ & 0 & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_4(3) & 0 \\ 0 & J_2(3) \end{bmatrix}$$

- 3 è l'unico autovalore
- $m_A(3) = 6$
- $m_G(3) = 2$

- Se si scrive A in questo modo diciamo che J è la "MATRICE DI JORDAN" ASSOCIATA AD A
- I numeri λ che compaiono nei blocchi di Jordan sono tutti e soli gli autovalori di A:

$$A = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_\ell}(\lambda_\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \vdots \\ J_{k_\ell}(\lambda_\ell) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}}_{k_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stesso discorso per gli altri λ:

Ricordiamo che λ autovalore $\Leftrightarrow$ esiste e autovettore $\neq 0$ con $Ae = \lambda e$ $\Leftrightarrow$ λ è una radice del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Si chiama molteplicità algebrica di λ_0 la molteplicità di λ_0 come radice di P CIOÈ λ_0 ha molteplicità algebrica m $\Leftrightarrow$

$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m \, \tilde{p}(\lambda)$ dove $\tilde{p}$ è un polinomio con $\tilde{p}(\lambda_0) \neq 0$

Si chiama molteplicità geometrica di λ_0 il massimo numero di autovettori lin. indip. relativi a λ_0.

- Se λ_0 è un autovalore di A $\Longrightarrow$

$m_G(\lambda_0)$ = numero di blocchi $J_k(\lambda)$ che compaiono in (★★)

$m_A(\lambda_0)$ = somma delle lunghezze di tutti i $J_k(\lambda_0)$ . . . (★★)

CHIAMO MATRICE DI JORDAN UNA DEL TIPO (★★)

PROBLEMA Scrivere e^{tJ} quando J è una matrice di Jordan.

(1) FATTO Se $J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}$ con J_i sottomatrici quadrate

$$\Longrightarrow e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_k} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{Se } J \text{ è come in ★★} \Longrightarrow e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_{k_R}(\lambda_R)} \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ MI BASTA TROVARE $e^{tJ_k(\lambda)}$

(2) Sia dunque $J = J_k(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{k} = D_k(\lambda) + B_k$

dove $D_k(\lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}}_{k} = \lambda I_k \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

è chiaro che D_k e B_k commutano ($D_k = \lambda I_k$) $\Longrightarrow$

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I_k} e^{tB_k} = e^{t\lambda} I_k \, e^{tB_k} = e^{t\lambda} e^{tB_k} =$$

(3) MI RIMANE DA CALCOLARE e^{tB_k}

$$B_K = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & K \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(tutti zeri - tranne la diagonale 2 piena di 1)

$$B_K^2 = B_K \cdot B_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow K-2 \\ \leftarrow K-1 \\ \leftarrow K \end{array}$$

(tutti zeri - tranne la diagonale 3 piena di 1)

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ | & & 0 & & 0 \\ 0 & & \text{---} & & 0 \end{bmatrix}$$

(tutti zeri - tranne la diagonale 4 piena di 1)

$$B_K^{K-1} = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & 1 \\ | & & 0 & 0 \\ & & & | \\ 0 & & \text{---} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_K^K = 0 \Rightarrow B_K^n = 0 \quad n \geq K$$

$$\Rightarrow e^{tB_K} = I + \frac{t}{1} B_K + \frac{t^2}{2!} B_K^2 + \cdots + \frac{t^{K-1}}{(K-1)!} B_K^{K-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \cdots & t^{K-1}/(K-1)! \\ | & \ddots & t & & & t^3/6 \\ | & & \ddots & \ddots & & t^2/2 \\ & & & \ddots & \ddots & t \\ & 0 & & \text{---} & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{tJ_K(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \cdots & t^{K-1}/(K-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t & t^2/2 \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}$$

SE NE DEDUCE CHE!

se fattorizzo A nella forma (**)

$$A = M J M^{-1}, \quad J = J(J_{K_1}(\lambda_1), \ldots, J_{K_R}(\lambda_R))$$

sono in grado di calcolare $e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} =$

$$M\, J\Big(\underbrace{e^{\lambda_1 t} e^{tB_{k_1}}}_{\uparrow\ ⓐ}, \dots, e^{\lambda_n t} e^{tB_{k_n}} \Big)$$

Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} x' = \boxed{5x - y} + t \\ y' = \boxed{4x + y} - 2t \\ x(0) = 1 \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

$\Big($ qui $Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ $\quad t_0 = 0 \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Big)$

È un sistema lineare con coeff. costanti $\rightarrow$ la matrice associata è

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Cerchiamo la forma di Jordan di A. <u>Cerco gli autovalori di A</u>

Polinomio caratteristico: $\quad p(\lambda) = (5-\lambda)(1-\lambda) + 4 =$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 + 4 \qquad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^{2}$.

$\Rightarrow$ UN SOLO AUTOVALORE $\quad \lambda = 3 \qquad m_A(3) = 2$

• $m_G(3) = ??$ $\iff$ $\dim(\operatorname{Ker}\underbrace{(A - 3I)}_{B}) = m_G(3)$

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}}$$

(deve avere Ker con dimensione ≥ 2, se $\dim(\operatorname{Ker}(B)) = 2 \Rightarrow B = 0$ <u>NO</u> $\Rightarrow$
$\dim \operatorname{Ker} B = 1$

<u>$m_G(3) = 1$</u>

Possiamo anche trovarlo più direttamente cercando gli elementi di $\operatorname{Ker}(B) = \{$autovettori di A - autovalore $\lambda = 3\}$

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} B \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{matrix} \iff e = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

RITROVO IL FATTO che $\operatorname{Ker}(B)$ ha <u>dimensione 1</u>

· Da quanto detto sopra (∃ la forma di Jordan - NON DIM.)

$$A = M \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{J} M^{-1}$$

chi è M ?!

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & \mid & m_2 \end{bmatrix}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{R}^2 \quad \Leftarrow \boxed{\begin{matrix} m_1 = M\hat{e}_1 \\ m_2 = M\hat{e}_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$m_1 \; m_2 \qquad m_1 \qquad\qquad m_1 \; m_2 \qquad m_2$

Allora $A\, m_1 = M J M^{-1} M \hat{e}_1 = M J \hat{e}_1 = M \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 M \hat{e}_1 = 3 m_1$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A\, m_1 = 3 m_1 \qquad \boxed{B\, m_1 = 0}$

DUNQUE m_1 = un autovettore di A

$$A\, m_2 = M J M^{-1} M \hat{e}_2 = M J \hat{e}_2 = M \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = M \left(\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 \right) = m_1 + 3 m_2$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A m_2 = m_1 + 3 m_2 \Leftrightarrow \boxed{B\, m_2 = m_1}$$

$B = A - 3I$

Mi fido del fatto che se trovo m_1 m_2 come sopra $\Rightarrow M = [m_1 \; m_2]$ VA BENE. Dai conti di prima ho che

$m_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftarrow$ scelgo $c = 1$ cioè $m_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

cerco $m_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ in modo che $B\, m_2 = m_1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

posso prendere $m_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

DUNQUE $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det M = -1$

Allora
$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{M^{-1}}$$

<u>Caso semplice</u> (eq. omogenea)

$$\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = 4x + y \\ x(0) = 1 \quad y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{se} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 =$$

$$M e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t} M \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t} M \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} t+1 \\ 2t+1 \end{bmatrix} \iff \boxed{\begin{aligned} x(t) &= (t+1)e^{3t} \\ y(t) &= (2t+1)e^{3t} \end{aligned}}$$

VERIFICHIAMO SE TORNA

$$x'(t) = e^{3t}\big(1 + 3(t+1)\big) = e^{3t}(3t+4)$$

$$y'(t) = e^{3t}\big(2 + 3(2t+1)\big) = e^{3t}(6t+5)$$

$$A\,Y(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t+1 \\ 2t+1 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 5t+5 - (2t+1) \\ 4t+4+2t+1 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 3t+4 \\ 6t+5 \end{bmatrix}$$

TORNA

DOMANI CONCLUDIAMO