Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 64 11/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

IL PROBLEMA SI SCRIVE

(E.Q) $$Y' = F(x, Y)$$

dove $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$

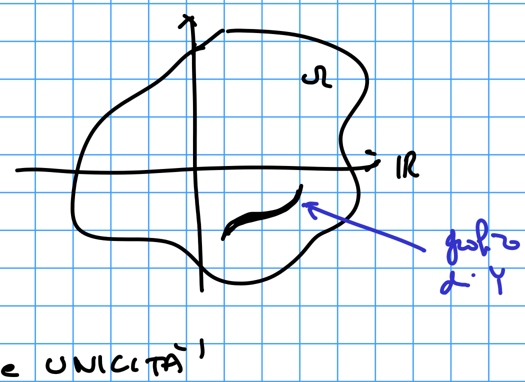
$$F(\underset{1}{x}, \underbrace{y_1 \dots y_N}_{N}) \qquad Y = (y_1 \dots y_N)$$

Def. Risolvere (E.Q.) significa trovare:

un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e una funzione $Y : I \to \mathbb{R}^N$ tale che

anche I è incognito

- Y è derivabile (in x)
- $(x, Y(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$
- $Y'(x) = F(x, Y(x)) \quad \forall x \in I$



TEOREMA DI CAUCHY (ESISTENZA LOCALE e UNICITÀ)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ aperto sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ CONTINUA (nella coppia (x, Y)). Supponiamo inoltre che F sia LIPSCHITZIANA IN Y uniformemente rispetto a x e cioè supponiamo che $\exists\ L \geq 0$ tale che

$$\| F(x, Y_2) - F(x, Y_1) \|_{\mathbb{R}^N} \leq L \, \| Y_2 - Y_1 \|_{\mathbb{R}^N} \quad \text{per ogni } (x, Y_1)\ (x, Y_2) \in \Omega$$

BASTA $(x, Y_i) \in B((x_0, Y_0), r)$

Allora per ogni $(x_0, Y_0) \in \Omega$ esiste $\delta > 0$ ed esiste $Y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}^N$ che risolve (E.D.) e tale che $Y(x_0) = Y_0$.
Diremo che Y è una "soluzione locale" del problema

risolve per $x \simeq x_0$

$$(P.C.) \begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

INOLTRE LA SOLUZIONE È UNICA

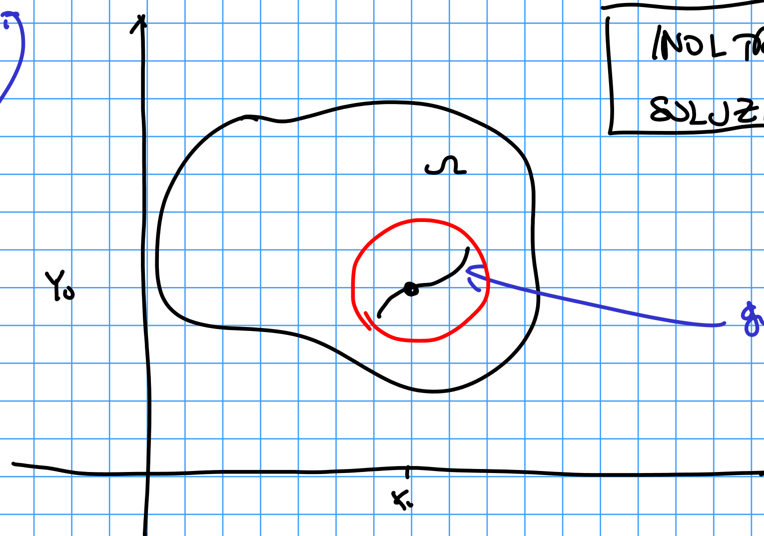


grafico della soluzione

$Y'(x) = F(x, Y(x))$
$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

OSS. • Perché sia vera la tesi basta che l'ipotesi di Lipschitz valga in un intorno di (x_0, Y_0):

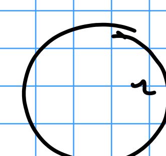
• Un'ipotesi sufficiente perché il teorema valga è che

$$\exists \ \frac{\partial}{\partial y_i} F(x, Y) \quad i = 1 .. N \quad \text{CONTINUE}$$

(NO DIM.) $$\| F(x, Y_2) - F(x, Y_1) \| \leq \max_{B(R, r)} \left\| \frac{\partial F}{\partial Y} \right\| \, \| Y_2 - Y_1 \|$$

Per esempio se consideriamo l'equazione

$$y' = \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}$$



vale il teorema di Cauchy in $\Omega = \{ x^2 + y^2 < 1 \}$ dove
$F(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}$ che è continua in Ω e derivabile rispetto a y

$\forall (x,y) \in \Omega$

RIGUARDO ALL'UNICITÀ: Vuol dire che

se $\exists\ I_1\ I_2$ intervalli di $\mathbb{R}$ e $\exists\ Y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ $x_0 \in I_1$
$Y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ $x_0 \in I_2$

che risolvono (P.C.) allora $Y_1(x) = Y_2(x)$ $\forall x \in I_1 \cap I_2$

DOMANDA Fino a quando esiste la soluzione ~ per quali x posso definire $Y(x)$.

Def. Se F è come sopra; $(x_0, y_0) \in \Omega$. Pongo

$\bar{x} = \sup \{ x : x > x_0,\ \exists\ Y : [x_0, x[$ che risolve (P.C.) $\}$

($\bar{x} > x_0$ per il teorema di esistenza) $\bar{x}$ si chiama tempo di esistenza massimale destro. Analogamente posso definire

$\underline{x} = \inf \{ x : x < x_0,\ \exists\ Y :]x, x_0]$ che risolve (P.C.) $\}$

$\underline{x} < x_0$ e si chiama tempo di esistenza massimale sinistro.

Chiamo $]\underline{x}, \bar{x}[$ l'intervallo di esistenza massimale.

TEOREMA (di esistenza della soluzione massimale)

(a) $\exists\ Y$ soluzione di (P.C.) definita su $]\underline{x}, \bar{x}[$ ed è UNICA.

(b) Non esiste nessuna soluzione di (P.C.) definita su un intervallo I con $]\underline{x}, \bar{x}[\subsetneq I$

(c) Ci sono tre possibilità riguardo a $\bar{x}$ (discorso analogo per $\underline{x}$)

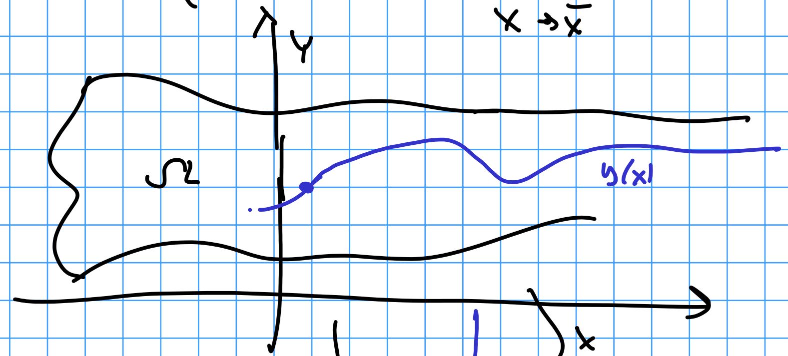
(1) $\bar{x} = +\infty$ (esiste la soluzione per gli tempi $> x_0$)

(2) $\bar{x} < +\infty$ e $\sup\limits_{x \in [x_0, \bar{x}[} \| Y(x) \| = +\infty$ (esplosione in tempo finito)

(3) $\bar{x} < +\infty$, $\sup\limits_{x \in [x_0, \bar{x}[} \| Y(x) \| < +\infty$ e $\inf\limits_{x \in [x_0, \bar{x}[} \operatorname{dist}\big((x, Y(x)), \partial\Omega\big) = 0$

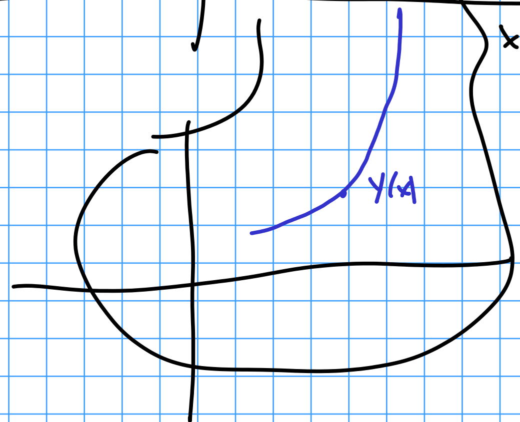
Nel caso (3), se esiste $\lim_{x \to \bar{x}} Y(x) = \bar{Y}$ allora $(\bar{x}, \bar{Y}) \in \partial\Omega$

(1)



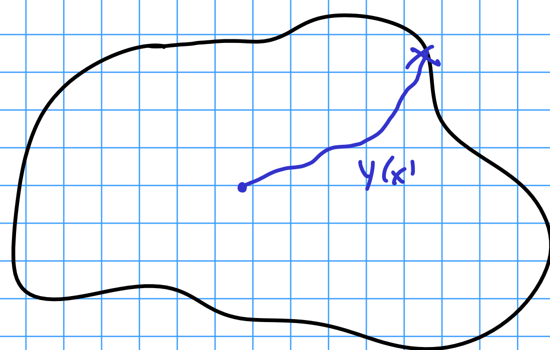
$\bar{x} = +\infty$

(2)



$\bar{x} < +\infty \quad y(x) \to +\infty$

(3)



$\bar{x} < +\infty$

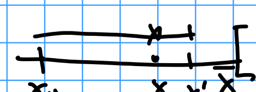
$(x, y(x)) \to (\bar{x}, \bar{Y}) \in \partial\Omega$

Dim. di (a): esiste la soluzione $\bar{Y}:]\underline{x}, \bar{x}[\to \mathbb{R}^N$ (ed è unica)

Se $x \in [x_0, \bar{x}[\Leftrightarrow x_0 \le x < \bar{x}$. Posso trovare $x' > x$ e $x' < \bar{x}$. Per definizione di $\bar{x}$ esiste Y soluzione di P.C. Y definita su $[x_0, x'[$; in particolare Y è definita in x.

Pongo $\bar{Y}(x) = Y(x)$. Per l'unicità il valore $\bar{Y}(x)$ non dipende dalla Y che ho usato per definire $\bar{Y}(x)$.

Stesso discorso se $\underline{x} < x \le x_0$.

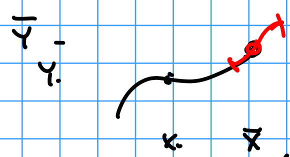


Dunque riesco a definire la soluzione massimale $\bar{Y}:]\underline{x}, \bar{x}[\to \mathbb{R}^N$ ed è unica per il teorema di Cauchy

(b) Se fosse possibile estendere $\bar{Y}$ a un intervallo aperto più grande ovvero un assurdo con la def di $\overline{x}$ o $\underline{x}$.

IN REALTÀ si può vedere che NON È POSSIBILE DEFINIRE $\overline{Y}$ nei punti $\overline{x}$ e $\underline{x}$

Se potessi farlo



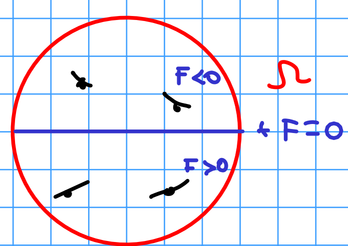
potrei usare il teorema di Cauchy in $(\overline{x},\overline{Y})$ e trovare una soluzione definita in $]\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta[$. $\Longrightarrow$ troverei che si può estendere $\overline{Y}$ fino a $\overline{x}+\delta$ ASSURDO.

IL PUNTO (c) non lo dimostro

LA $\overline{Y}$ data dal teorema $Y:]\underline{x},\overline{x}[\to \mathbb{R}^N$ si chiama SOL. MASSIMALE (di (x_0,Y_0))

ESEMPIO

$$y' = \frac{y}{x^2+y^2-1} \qquad \text{su } \Omega = \{x^2+y^2<1\} = B(0,1)$$



T. di es. loc. $\Longrightarrow$ se $(x_0,y_0)\in\Omega$ esiste $y:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ soluzione

NOTA
- se $y_0>0$ y è decrescente (vicino a x_0)
- se $y_0<0$ y è crescente (vicino a x_0)
- ho la soluzione costante $y(x)=0$ $-1<x<1$ (è massimale)

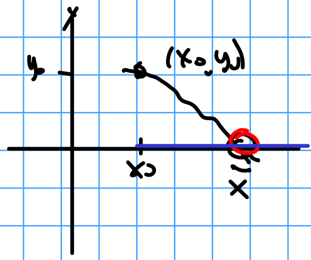
– Come sono fatte le sol massimali. È chiaro che (1) e (2) non si possono presentare perché Ω è limitato. DEVE VERIFICARSI (3)

$y(x)$ si avvicina a $\partial\Omega=\{x^2+y^2=1\}$ se $x\simeq\overline{x}$ / $x\simeq\underline{x}$

CONSIDERO $\overline{x}$. ($\overline{x}\le 1 \Leftarrow$ se $(x,y)\in\Omega \Rightarrow x\le 1$)

Parto con $y_0>0$ $\Longrightarrow$ y è decrescente vicino a x_0.

DICO CHE NON ESISTE $\tilde{x}\in[x_0,\overline{x}[$ con $y(\tilde{x})=0$

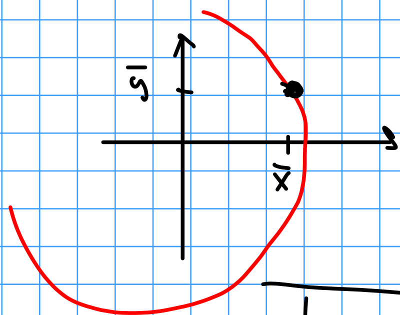


Se ci fosse $\tilde{x}$ $\Rightarrow$ da $\tilde{x}$ partono due soluzioni e cioè $y(x)$ (quella che in x_0 vale y_0) e la soluzione costante $y(x) = 0$

IMPOSSIBILE PER IL TEOR. DI CAUCHY

$\Rightarrow \forall x \in [x_0, \bar{x}[\quad y(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad y$ è decrescente in $[x_0, \bar{x}[$

$\Rightarrow$ esiste $\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x) =: \bar{y} (\geq 0)$ Per la (3) deve essere



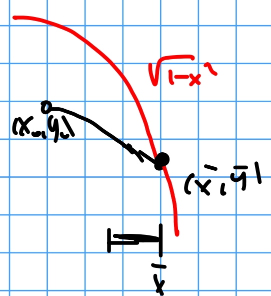
$(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial\Omega$ cioè

$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$

DICO CHE $\bar{x} = 1$ $\bar{y} = 0$. Se $\bar{y} > 0$ $(\bar{x} < 1)$ allora

$$\boxed{\lim_{x \to \bar{x}} y'(x) = \lim_{x \to \bar{x}} F(x, y(x)) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to \bar{y}}} F(x,y) = -\infty}$$

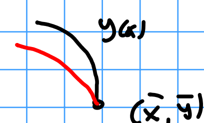
QUESTO È IMPOSSIBILE PERCHÉ $y(x) \leq g(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad \underline{\bar{x} < 1}$



e $g'(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. Se y fosse come sopra

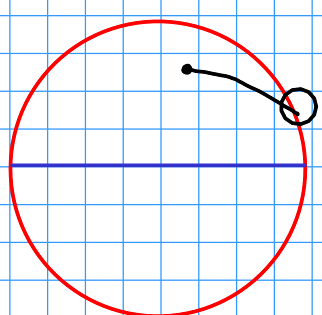
$\underset{\downarrow\, -\infty}{y'(x)} > \underbrace{g'(x)}_{\text{è limitata}} \quad \forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x}]$

$\Longrightarrow$

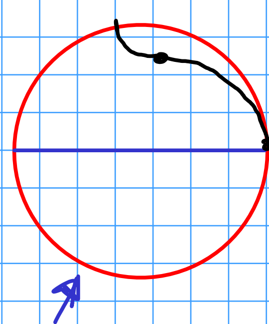


$y(x) > g(x) \quad x < \bar{x}$
$x \simeq \bar{x}$

ASSURDO



$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= 1 \\ \bar{y} &= 0 \end{aligned}}$$



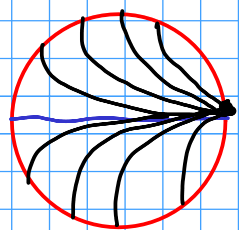
Le soluzioni che partono da x_0, y_0 con $y_0 > 0$ esistono in $[x_0, 1[$.

e tendono a zero per $x \to 1$

· PERALTRO SE $x < x_0 \Rightarrow y$ è crescente in $[\underline{x}, x_0]$

$\left(\text{se } x < x_0 \Rightarrow y(x) \geq y(x_0) = y_0 > 0 \right) \Rightarrow$

$\exists\ \underline{y} = \lim_{x \to \underline{x}} y(x)$ e $(\underline{x}, \underline{y}) \in \{x^2 + y^2 = 1\}$



ANALOGO DISCORSO PER $y_0 < 0$

(soluzioni crescenti)

completamento delle soluzioni dell'eq

EQ (SISTEMI) LINEARI

TUTTO QUELLO CHE STIAMO DICENDO RIGUARDA L'ORDINE 1 ← NELL'eq compare solo la derivata prima

(E.L) $\boxed{Y' = A(t)Y + B(t)}$

dove A è una funzione definita per $t \in I$, I intervallo a valori nelle matrici $N \times N$:

$A : I \to \mathbb{R}^{N \times N}$

mentre $B : I \to \mathbb{R}^N$

DUNQUE se $t \in I$ $A(t)$ è una matrice $N \times N$, B è un vettore di $\mathbb{R}^N$

IPOTESI A, B CONTINUE

Questa equazione rientra nel caso generale considerando

$\Omega = I \times \mathbb{R}^N \qquad F(t, Y) = A(t)Y + B(t)$

FATTO Se A e B sono continue $\Rightarrow$ F verifica le ipotesi del teorema di Cauchy.

DIM. F è continua, dato che A e B sono continue. INOLTRE

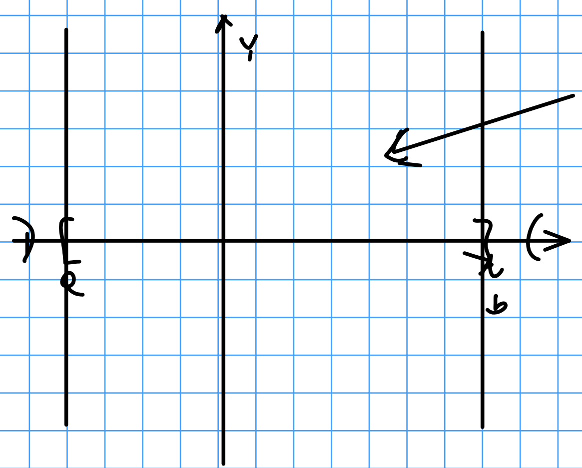
$$\| F(t, Y_1) - F(t, Y_2) \|_{\mathbb{R}^N} \overset{\text{i} - (t, Y)}{=} \| A(t) Y_1 + \cancel{B(t)} - A(t) Y_2 - \cancel{B(t)} \|_{\mathbb{R}^N} =$$

$$\|A(t)(Y_2-Y_1)\|_{\mathbb{R}^N} \le \|A(t)\|_{N\times N}\ \|Y_2-Y_1\|_{\mathbb{R}^N}$$

Dato che A è continua so che $\exists \max_{a\le t\le b}\|A(t)\| < +\infty$ in $[a,b]\subset I$ (qualunque siano a,b con $[a,b]\subset I$)

DUNQUE se $[a,b]\subset I \Rightarrow$

$$\|F(t,Y_2)-F(t,Y_1)\| \le \text{cost}\ \|Y_2-Y_1\| \qquad \forall Y_1,Y_2\in\mathbb{R}^N \quad \forall t\in[a,b]$$



LIP su $[a,b]\times\mathbb{R}^N$

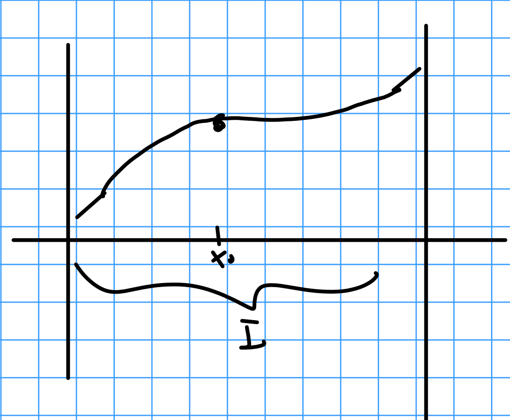
$\Downarrow$

F è localmente lip in $\Omega = I\times\mathbb{R}^N$

(per ogni $(x_0,Y_0)\in\Omega$ trovo a e b t.c. $a<x_0<b$ $[a,b]\subset I$)

$\Longrightarrow$ $\forall x_0\in I$ $\forall Y_0\in\mathbb{R}^N$ esiste una soluzione dell'eq. lineare $Y:]x_0-\delta, x_0+\delta[\to \mathbb{R}^N$

FATTO 2 Nel caso lineare $\forall x_0\in I$ $\forall Y_0\in\mathbb{R}^N$ l'intervallo massimale della soluzione del problema di Cauchy (con $Y(x_0)=Y_0$) è lo stesso I



- LA SOLUZIONE $Y(t)$ esiste $\forall t$ in cui sono definiti i coefficienti $A(t)$ e $B(t)$

DICO CHE (E.L) è OMOGENEA SE $B(t)=0$ $\forall t$

(lo indico con $(E.L)_0$)

PROP. Se A e B sono continue su I $\Rightarrow$

(a) Le soluzioni Y di $(E.L.)_0$ formano uno spazio lineare di dimensione N. QUESTO SIGNIFICA:

(1) Se Y_1 e Y_2 sono soluzioni e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ è ancora soluzione

Le Y formano uno spazio lineare

(2) $\exists$ $Y_1 \dots Y_N$ sol. di $(E.L.)_0$ tali che

<u>Y_i sono lin. indipendenti</u>:

Se $\lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$, se $\lambda_1 Y_1(t) + \dots + \lambda_N Y_N(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$

<u>Y_i generano tutte le soluzioni</u>:

se Y è soluzione $\Rightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_N$ per cui $Y(t) = \lambda_1 Y_1(t) + \dots + \lambda_N Y_N(t)$

(b) Sia $\bar{Y}$ una soluzione dell'eq. completa $(E.L)$. Allora ogni Y soluzione si può scrivere come $\boxed{Y = \bar{Y} + Y_0}$ dove Y_0 è sol di $(E.L.)_0$. $\simeq$ Le soluzioni $(E.L)$ sono "UNO SPAZIO AFFINE" di dim N

DIM. (a) LA 1 è IMMEDIATA:

- $Y_1' = A(t) Y_1(t)$ $\quad Y_2' = A(t) Y_2(t)$ $\quad \forall t \in I$

$$\Downarrow$$

$$(Y_1 + Y_2)' = Y_1' + Y_2' = A(t) Y_1 + A(t) Y_2 = A(t)(Y_1 + Y_2)$$

- Sia $t_0 \in I$. Considero $Y_1 \dots Y_N$ definite così:

$$Y_i = \text{soluzione di } (E.L.)_0 \text{ tale che } Y_i(t_0) = \hat{e}_i = (0 \dots \overset{i\text{-esimo}}{1} \dots 0)$$

- Dico che le Y_i sono <u>indipendenti</u>: se $\lambda_1 Y_1(t) + \dots + \lambda_N Y_N(t) = 0$ $\forall t$

$\Rightarrow \lambda_1 Y_1(t_0) + \dots + \lambda_N Y_N(t_0) = 0 = \lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N \hat{e}_N = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i$

- Dico che le Y_i generano tutte le soluzioni:

Sia Y una soluzione di $(E.L.)_0$ Considero $Y(t_0) \in \mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ esistono $\lambda_1 .. \lambda_N \in \mathbb{R}$ t.c. $Y(t_0) = \underline{\lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N \hat{e}}$

(λ_i sono le coordinate di $Y(t_0)$)

CONSIDERO $\tilde{Y}(t) = \lambda_1 Y_1(t) + \dots + \lambda_N Y_N(t)$

$\tilde{Y}$ risolve l'equazione $(E.L)_0$ ($\tilde{Y}$ è comb. lin. di sol.)

$\tilde{Y}(t_0) = \lambda_1 \hat{e}_1 + \dots + \lambda_N \hat{e}_N = Y(t_0)$

Per l'unicità $\Rightarrow$ $Y(t) = \tilde{Y}(t)$ $\forall t$ $\Rightarrow$ tesi

(b) · Se $\bar{Y}$ è soluzione di $(E.L)$, Y_0 è sol di $(E.L)_0$ $\Rightarrow$

$$(\bar{Y} + Y_0)' = \bar{Y}' + Y_0' = A(t)\bar{Y} + B(t) + A(t)Y_0 = A(t)(\bar{Y}+Y_0) + B(t)$$

$\Rightarrow$ $\bar{Y} + Y_0$ è sol. di $(E.L)$

· Viceversa se Y è sol di $(E.L.)$ $\Rightarrow$ $\bar{Y} - Y$ è sol di $(E.L.)_0$

INFATTI
$$(\bar{Y} - Y)' = \bar{Y}' - Y' = A(t)\bar{Y} + \cancel{B(t)} - (A(t)Y - \cancel{B(t)}) = A(t)(\bar{Y} - Y)$$

#