Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 63 06/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

~~(d) Si dica se l'insieme M del punto precedente è limitato (1p.).~~

2. Si consideri il campo di vettori $\vec{F} := (yz + y^3 z - z^3)\vec{\mathbf{i}} + (xz - x^3 z - e^{yz})\vec{\mathbf{j}} + xy\vec{\mathbf{k}}$.

   (a) Si calcoli $\vec{f} := \vec{\nabla} \otimes \vec{F}$ (il rotore di $\vec{F}$) (1p.).

   (b) Si usi il Teorema di Stokes per calcolare $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove $\gamma(t) = \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, per $0 \leq t \leq 2\pi$ (4p.).

   (c) Si calcoli $\iint\limits_{\partial Q} \vec{F} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$, dove $Q := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ (3p.).

   (d) Si dica se $\vec{f}$ è conservativo (1p.).

$$\vec{F} := (yz + y^3 z - z^3)\vec{i} + (xz - x^3 z - e^{yz})\vec{j} + xy\,\vec{k}$$

① Calcolare $\vec{g} = \text{rot}\,\vec{F}$:

$$\vec{g} = \det\begin{bmatrix} i & D_x & yz + y^3 z - z^3 \\ j & D_y & xz - x^3 z - e^{yz} \\ k & D_z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - (x - x^3 - y e^{yz}) \\ -y + y + y^3 - 3z^2 \\ z - 3x^2 z - (z + 3y^2 z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + y e^{yz} \\ y^3 - 3z^2 \\ -3x^2 z - 3y^2 z \end{bmatrix}$$

② $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = ??$ $\quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 1) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$\quad (\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0))$

(2.A) Proviamo ad applicare la def di $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\longrightarrow \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[(\sin(t) + \sin^3(t) - 1)\vec{i} + (\cos(t) - \cos^3(t) - e^{\sin(t)})\vec{j} + (\cos(t)\sin(t))\vec{k} \right] \cdot \left[-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t) - \sin^4(t) + \sin(t) + \cos^2(t) - \cos^4(t) - \cos(t) e^{\sin(t)} \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\cos(2t)}_{\text{ho integrale nullo su } [0,2\pi]} - (\sin^2(t))^2 - (\cos^2(t))^2 + \underbrace{\sin(t)}_{\text{ho int. nullo}} - \underbrace{\cos(t) e^{\sin(t)}}_{\substack{s = \sin(t) \\ ds = \cos(t)dt}} \Big) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^2 \right) dt \underbrace{- \int_0^0 e^s\,ds}_{=0} =$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(1 + \cos^2(2t) - \cancel{2\cos(2t)} + 1 + \cos^2(2t) + \cancel{2\cos(2t)} \right) dt =$$

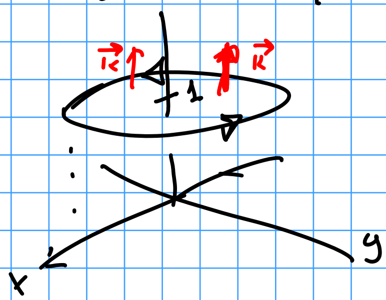
$$-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(2 + 2\cos^2(2t) \right) dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + \cos^2(2t) \right) dt =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 + \cos(4t)}{2} \right) dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\frac{3}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(4t)}_{\text{ho integrale nullo}} \Big) dt = -\frac{3}{2}\pi$$

(2.B) Uso stokes

$$\oint_{\Sigma(S,\hat{\nu})} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$$

CHI E' S ??



Deve essere $\Sigma(S,\hat{\nu})$ descritto da γ

Posso prendere

$S = \{(x,y,1) : x^2+y^2 \le 1\}$

$\hat{\nu} = \vec{k}$ Vedo S come grafico di $g(x,y)=1$

e calcolo $\Phi(\vec{f}, S, \vec{k}) =$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \underbrace{\vec{f}(u,v,1)\cdot\vec{k}}_{f_3(u,v,1)}\, du\,dv = \iint_{x^2+y^2\le 1} -3(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$-3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\rho\, d\rho = -3\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{3}{2}\pi$$

(C) $\Phi(\vec{F}, \partial Q, \hat{\nu}) = \iiint_Q \operatorname{div}\vec{F}$

$\hat{\nu}$ uscente da Q

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0 - ze^{yz} + 0 = -ze^{yz}$$

$$\iiint_Q -ze^{yz}\,dx\,dy\,dz = -\int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^1 z e^{yz}\,dy =$$

$$= -\int_0^1 dz\left[e^{yz}\right]_{y=0}^{y=1} = -\int_0^1 (e^z-1)\,dz = -\left[e^z - z\right]_0^1 = \boxed{2-e}$$

DOMANDA TROVARE $\vec{G}$ che verifica $\operatorname{rot}\vec{G} = \vec{f}$

con $G_3 = 0$

$$\text{rot}\,\vec{G} = \det\begin{bmatrix} i & D_x & G_1 \\ j & D_y & G_2 \\ k & D_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_z G_2 \\ D_z G_1 \\ D_x G_2 - D_y G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + ye^{yz} \\ y^3 - 3z^2 \\ -3x^2z - 3y^2z \end{bmatrix}$$

(A) $D_z G_2 = -x^3 - ye^{yz}$ (B) $D_z G_1 = y^3 - 3z^2$

(C) $D_x G_2 - D_y G_1 = -3x^2z - 3y^2z$

(A) $\rightarrow$ $G_2 = -x^3z - e^{yz} + c(x,y)$

(B) $\rightarrow$ $G_1 = y^3z - z^3 + d(x,y)$

$$D_x G_2 - D_y G_1 = -3x^2z - 3y^2z - D_x c(x,y) - D_y d(x,y) \overset{(c)}{=} -3x^2z - 3y^2z$$

Posso prendere $c = d = 0$ $\Rightarrow$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} -x^3z - e^{yz} \\ y^3z - z^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(sia $\vec{F}$ che $\vec{G}$ sono potenziali vettori per $\vec{f}$)

<u>OSS.</u> Avrei potuto fare così: cerco V in modo che

$$\vec{G} = \vec{F} + \nabla V = \begin{bmatrix} (yz + y^3z - z^3) \\ (xz - x^3z - e^{yz}) \\ xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x V \\ D_y V \\ D_z V \end{bmatrix}$$

e se voglio $G_3 = 0$ $\Rightarrow$ $D_z V = -xy$

dunque $V = -xyz + c(x,y)$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} (yz + y^3z - z^3) \\ (xz - x^3z - e^{yz}) \\ xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -yz + D_x c(x,y) \\ -xz + D_y d(x,y) \\ -xy \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} y^3z - z^3 + D_x c \\ -x^3z - e^{yz} + D_y d \\ 0 \end{bmatrix}}$$

quello che ho trovato prima.

Posso anche trovare un altro campo $\vec{H}$ con rot $\vec{H} = \vec{f}$

e con $H_1 = 0$.

$$\vec{H} = \vec{F} + \nabla W = \begin{bmatrix} (yz + y^3 z - z^3) \\ (xz - x^3 z - e^{yz}) \\ xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x W \\ D_y W \\ D_z W \end{bmatrix}$$

con la condizione $yz + y^3 z - z^3 = -D_x W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{W = -xyz - xy^3 - xz^3}$$

$$D_y W = -xz - 3xy^2$$

$$D_z W = -xy - 3xz^2$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x^3 z - 3xy^2 - e^{yz} \\ -3xz^2 \end{bmatrix}$$

#