Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 62 05/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:

https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

TEOREMA DI STOKES Sia $(S, \hat{\nu})$ sia una superficie ORIENTATA, regolare a tratti. Sia $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 ($\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}$, $S \subset \Omega$ aperto, $\vec{f} \in C^1(\Omega)$). ALLORA

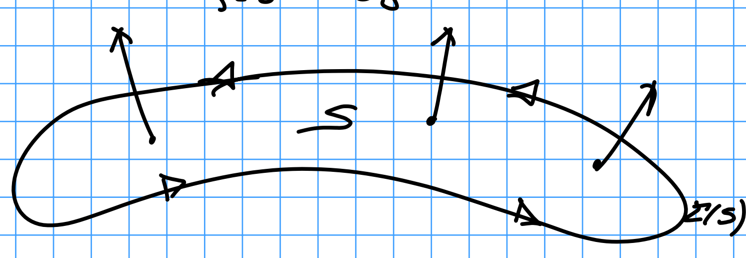
$$\boxed{\int_{\Sigma(S,\hat{\nu})} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \Phi(\operatorname{rot} \vec{f}, S, \hat{\nu})}$$

$\Sigma(S,\hat{\nu})$: indica il bordo $\Sigma(S)$ di S, percorso coerentemente con $\hat{\nu}$

$\simeq$ $\Sigma(S)$ descritto da $\gamma_0\ \gamma_1 \cdots \gamma_k$ curve chiuse regolari a tratti

CON VERSO COERENTE con $\hat{\nu}$ e dunque

$$\int_{\Sigma(S,\hat{\nu})} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=0}^{k} \int_{\gamma_j} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$



LEMMA Sia $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ Ω aperto di $\mathbb{R}^3$ $\vec{f} \in C^1(\Omega)$.

Allora
$$\left(J_f - J_f^{\,t}\right)\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{f} \otimes \vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$
dove J_f = Jacobiano di $\vec{f}$

DIM.

$$J_f - J_f^{\,t} = \begin{bmatrix} D_x f_1, & D_y f_1, & D_z f_1 \\ D_x f_2, & D_y f_2, & D_z f_2 \\ D_x f_3, & D_y f_3, & D_z f_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_x f_1 & D_x f_2 & D_x f_3 \\ D_y f_1 & D_y f_2 & D_y f_3 \\ D_z f_1 & D_z f_2 & D_z f_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0, & D_y f_1 - D_x f_2, & D_z f_1 - D_x f_3 \\ D_x f_2 - D_y f_1, & 0, & D_z f_2 - D_y f_3 \\ D_x f_3 - D_z f_1, & D_y f_3 - D_z f_2, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\underset{\vec{r}}{\operatorname{rot} \vec{f}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \right) \qquad \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} = J_f - J_f^{\,t}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \left(J_f - J_f^{\,t}\right)\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 v_3 - r_3 v_2 \\ r_3 v_1 - r_1 v_3 \\ r_1 v_2 - r_2 v_3 \end{bmatrix}$$

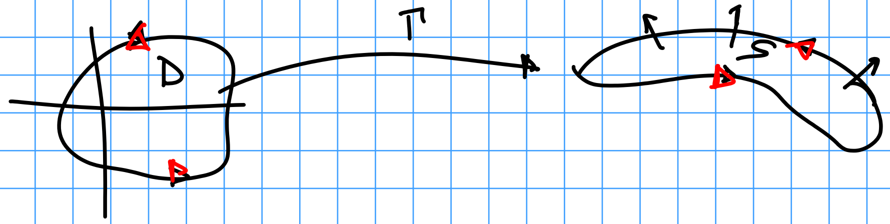
SONO EGUALI

$$\vec{r} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} i & r_1 & v_1 \\ j & r_2 & v_2 \\ k & r_3 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 v_3 - r_3 v_2 \\ r_3 v_1 - r_1 v_3 \\ r_1 v_2 - r_2 v_3 \end{bmatrix} \quad \#$$

DIM DI STOKES — CASO S è una superficie parametrica

Suppongo inoltre $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di S sia C^2

* ha normale col verso di $\hat{S}$



INTRODUCO $\vec{g}: D \to \mathbb{R}^2$ $\qquad \vec{g}(u,v) = \begin{bmatrix} \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \\ \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$

$$\vec{g} = \left[\frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial u}^t}{\frac{\partial \Gamma}{\partial v}^t} \right] \vec{f} \circ \Gamma = J_\Gamma(u,v)^t \, \vec{f}(\Gamma(u,v))$$

APPLICO GAUSS-GREEN A $\vec{g}$:

$$① \leftarrow \boxed{\int_{\partial D} \vec{g} \cdot d\vec{s}} = \boxed{\iint_D \left(\frac{\partial g_2}{\partial u} - \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) du \, dv} \to ②$$

$\int_{\partial D} \vec{g} \cdot d\vec{s}$ $\qquad$ suppongo per semplicità che ∂D sia descritto da un solo $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ chiuso (con il verso giusto)

$$\overset{\shortparallel}{=} \int_a^b \vec{g}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_a^b J_\Gamma(\gamma(t))^t \, \vec{f}(\Gamma(\gamma(t))) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt =$$

$$\int_a^b \vec{f}(\Gamma(\gamma(t))) \cdot \underbrace{\left(J_\Gamma(\gamma(t)) \, \dot{\gamma}(t) \right)}_{\frac{d}{dt} \Gamma(\gamma(t)) = \tilde{\gamma}'(t)} dt =$$

CHIAMO $\tilde{\gamma}(t) = \Gamma(\gamma(t))$

$$\int_a^b \vec{f}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) \, dt = \boxed{\int_{\tilde{\gamma}} \vec{f} \cdot d\vec{s}} \leftarrow ① = \int_{\partial \Sigma(S, \hat{v})} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$\underline{\tilde{\gamma} \text{ percorre } \Sigma(S) \text{ coerentemente con la normale}}$

② → INTEGRANDO $= \frac{\partial g_2}{\partial u} - \frac{\partial g_1}{\partial v} =$

$$\frac{\partial}{\partial u} \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial}{\partial v} \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) =$$

$$\left(J_f(\Gamma(u,v)) \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) + \cancel{\vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial u \partial v}(u,v)}$$

$$- \left(J_f(\Gamma(u,v)) \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) - \cancel{\vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial v \partial u}(u,v)}$$

Schwartz

$$\left(J_{f}(\Gamma(u,v)) \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) - J_{f}(\Gamma(u,v))^{t} \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) =$$

$$\left(A\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot A^{t}\vec{w} \right) \quad = \left(J_f \circ \Gamma - J_f \circ \Gamma^{t} \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \underset{\text{(LEMMA)}}{=}$$

(proprietà di $\times$)

$$\left(\mathrm{rot}\, \vec{f} \circ \Gamma \right) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{f} \circ \Gamma =$$

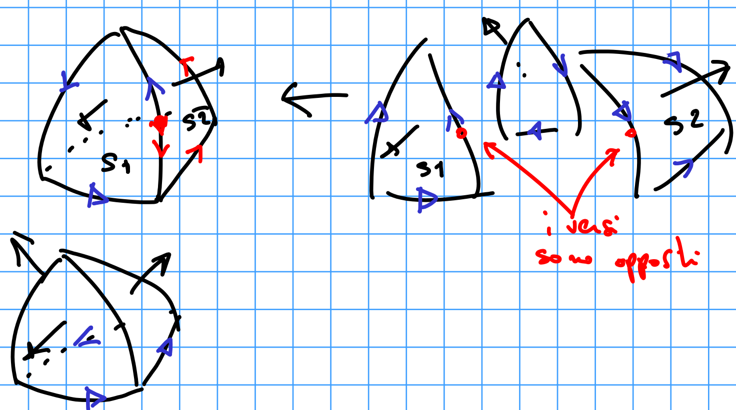
$$\left(\mathrm{rot}\, \vec{f} \right) \circ \Gamma \cdot \vec{N}_{\Gamma} \quad \Rightarrow$$

$$② = \iint_{D} \mathrm{rot}\, \vec{f}\left(\Gamma(u,v) \right) \cdot \vec{N}_{\Gamma}(u,v)\, du\, dv = \iint_{S} \mathrm{rot}\, \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

- DUNQUE IL TEOREMA È VERO IN QUESTO CASO PARTICOLARE

SI PUÒ DIM. CHE IL TEOR. RIMANE VERO SE Γ è solo C^1

- Nel caso generale $(S, \hat{\nu}) = (S_1, \hat{\nu}) \cup \ldots (S_k, \hat{\nu})$ e dove S_i si incolla con S_j i versi di $\Sigma(S_i)$ e $\Sigma(S_j)$ sono opposti



$$\iint_{S} \mathrm{rot}\, \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_k} \mathrm{rot}\, \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\int_{\Sigma(S_k, \nu_k)}}_{} \vec{f} \cdot d\vec{s} =$$

in questa sommatoria i bordi su cui si incollano S_i e S_j $(i \neq j)$ si cancellano

$$\int_{\Sigma(S,\hat{\nu})} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

#

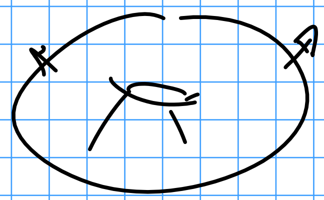
<u>OSS.</u> Se $\Sigma(S) = \phi \Rightarrow \iint_{S} \mathrm{rot}\, \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 0$ ⊛

Questo fatto è "parente" di questa proprietà:

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\, \vec{f} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{f} \right) = \vec{f} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}}_{=0} = 0$$

Se poi S è orientabile (ammette un $\hat{\nu}$ ...)

e $\Sigma(S)=\phi$ $\underset{\text{qualitativo}}{\rightsquigarrow}$ $S=\partial\Omega$ per un Ω regolare



allora $\Phi(\text{rot}\,\vec{f}, \partial\Omega, \hat{\nu}) = \iiint_{\Omega} \underbrace{\text{div rot}\,\vec{f}}_{=0} = 0$

NON È SORPRENDENTE ☆

(TUTTO SI REGGE SE ☆ $\text{rot}\,\vec{f}$ è definito su tutto $\Omega - \partial\Omega = S$)

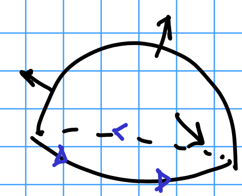
ESEMPIO

$$\vec{f}(x,y,z) = e^{z}\left(y\vec{i} - x\vec{j} + xy\vec{k}\right)$$

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$$

$$\Sigma(S) = \{(x,y,0) : x^2+y^2=1\}$$

$$\hat{\nu}(P) = \vec{P} \quad \text{se } P\in S\setminus\Sigma(S)$$



VERIFICO CHE VALE STOKES: uso $\gamma(t)=\cos(t)\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+0\vec{k}$, $0\leq t\leq 2\pi$

(1) $$\int_{\Sigma(S,\hat{\nu})} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} e^{0}\left(\sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j}\right)\cdot\underbrace{\left(-\sin(t)\vec{i}+\cos(t)\vec{j}\right)}_{\gamma'(t)}dt =$$

$+\,e^{0}\cos(t)\sin t\,\vec{k}$ che però sparisce nel prodotto scalare

$$\int_0^{2\pi}(-1)\,dt = -2\pi$$

(2) $$\text{rot}\,\vec{f} = \det\begin{bmatrix}\vec{i} & D_x & e^{z}y\\ \vec{j} & D_y & -e^{z}x\\ \vec{k} & D_z & e^{z}xy\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{z}x + e^{z}x\\ -e^{z}y - e^{z}y\\ -e^{z} - e^{z}\end{bmatrix} = 2e^{z}\begin{bmatrix}x\\ -y\\ -1\end{bmatrix}$$

Parametrizzo S con coordinate sferiche (θ,φ)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 2e^{\cos\varphi}\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\sin\varphi\\ -1\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\sin\varphi\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}}_{\vec{r}(\theta,\varphi)}}_{N_r}\,d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} e^{\cos\varphi} \sin\varphi \left(\underbrace{\cos^2\theta \sin^2\varphi - \sin^2\theta \sin^2\varphi} - \underbrace{\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$2\underbrace{\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}_{0} \int_0^{\pi/2} e^{\cos\varphi}\sin^3\varphi - 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, e^{\cos\varphi} d\varphi$$

$\cos\varphi = t$

$-\sin\varphi \, d\varphi = dt$

perché l'integrando è $\cos(2\theta)$ che ha integrale nullo su $[0,\pi]$ e su $[\pi,2\pi]$

$$= -2 \cdot 2\pi \int_1^0 t \, e^t \, (-dt) =$$

$$= -4\pi \int_0^1 t \, e^t \, dt = -4\pi \left[t \, e^t \right]_0^1 + 4\pi \int_0^1 e^t \, dt =$$

$$-4\pi \left(e - 0 \right) + 4\pi \left[e^t \right]_0^1 = -4\pi e + 4\pi e - 4\pi = -4\pi$$