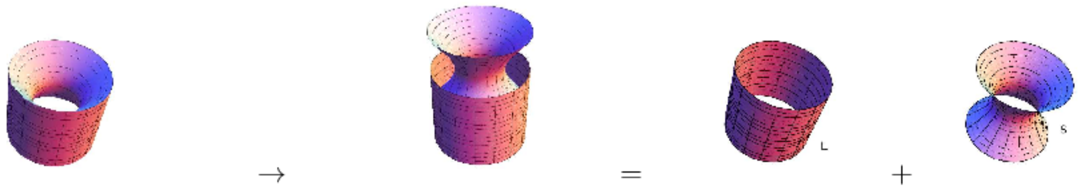
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 61 04/05/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web:
https://people.unipi.it/claudio_saccon/lezioni-di-analisi-2-e-complenti-anno-2019-20/

ESERCIZI

2. Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \geq x^2 + y^2 \geq 1 + z^2\}$. D è un dominio regolare a tratti ed è rappresentato di sotto:



In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera ∂D scomposta nelle due superfici regolari S ed L. Sia inolte $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ il campo definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := 3xyz^2(y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}}) + 2z^3x^2\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

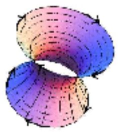
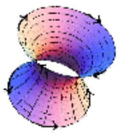
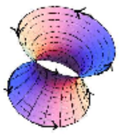
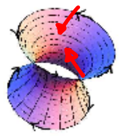
(a) Si scriva analiticamente il bordo di S (1p.):

$\Sigma(S) = \boxed{\left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}}$

(b) Si scrivano le normali unitarie uscenti da D nei punti $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ e $P_1 = (1, -1, -1)$ (0,5+0,5p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{k}} \qquad \hat{\nu}(P_1) = \boxed{}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{k}}$

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta la corretta orientazione di $\Sigma(S)$ quando su L si considera la normale uscente da D (0,5p.):

 ☐  ☐  ☐  ☒

(d) Si calcolino, facendo vedere i passaggi principali, i seguenti flussi:

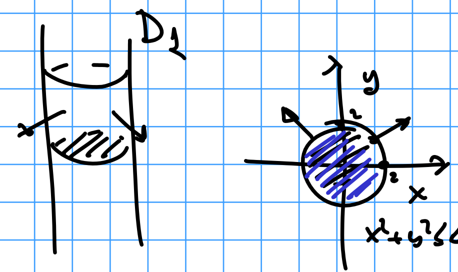
$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{} \quad \text{(3 p.)}$$

$$\iint_{S} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{} \quad \text{(1,5 p.)}$$

Svolgimento delle parte (d)

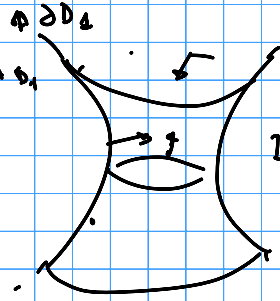
$D = \{(x,y,z) : 4 \geq x^2+y^2 \geq 1+z^2\}$

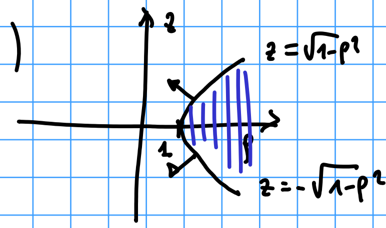
$= \{G_1 \leq 0\} \cap \{G_2 \leq 0\} = D_1 \cap D_2$



- $G_1 = x^2+y^2-4$ $\qquad G_1 \leq 0 \longrightarrow$

$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$ ← NORMALE USCENTE DA D_1 a ∂D_1





- $G_2 = 1+z^2-x^2-y^2$

$1+z^2-\rho^2 \leq 0$

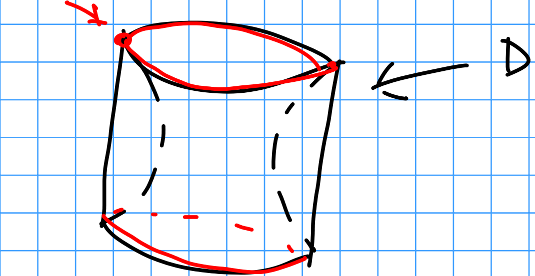
$z^2 \leq 1-\rho^2$

$|z| \leq \sqrt{1-\rho^2}$

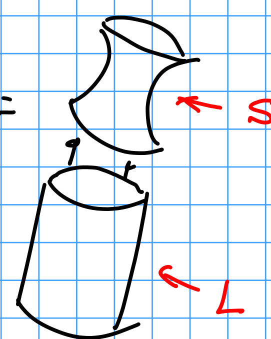
$\nabla G_2 = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix}$ ← NORMALE USCENTE DA D_2 a ∂D_2 ← x $z \geq$ punta verso l'alto

qui non $\exists$ $\hat{n}$

$\Rightarrow$



$\partial D =$



PRIMA DOMANDA $\qquad$ (a) Scrivo $\Sigma(S)$

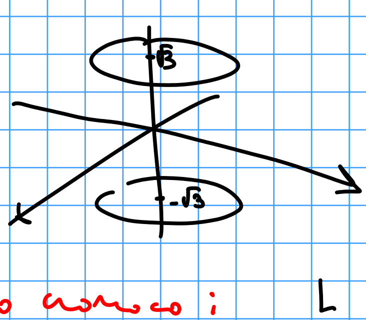
Per quanto visto $\qquad D = \{G_1 \leq 0\} \cap \{G_2 \leq 0\} \Rightarrow$

$\partial D = \boxed{\underbrace{\{G_1 = 0, G_2 \leq 0\}}_{L}} \cup \boxed{\underbrace{\{G_1 \leq 0, G_2 = 0\}}_{S}}$

$\Sigma(S) = \{G_1 = G_2 = 0\} =$

$\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4 = z^2+1\} = \{x^2+y^2=4,\ z^2=3\} =$

$\{x^2+y^2=4,\ z=\sqrt{3}\} \cup \{x^2+y^2=4,\ z=-\sqrt{3}\}$



Per lo mantello: $\qquad L = \{x^2+y^2=4,\ -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}\}$

$$S = \{ x^2+y^2 = z^2+1 \ , -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}$$

Domanda (b) Scrivere $\hat{\nu}(P_0)$ (normale unitaria uscente in P_0) se

(b.1) $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ / (b.2) $P_0' = (1, -1, -1)$

La domanda ha senso se $P_0 \notin \Sigma^*(\partial D)$, $P_0 \in \partial D \setminus \Sigma(S) = \partial D \setminus \Sigma(L)$

$P_0 \in = \{ G_1 = 0 \ \ G_2 < 0 \} \cup \{ G_1 < 0 , \ G_2 = 0 \}$

$\Sigma^*(\partial) = \Sigma(S) = \Sigma(L)$

Controlliamo dove si trova P_0. $P_0 \in L$ perché

$$G_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) = \sqrt{2}^2 + (\sqrt{2})^2 - 4 = 0$$

$$G_2(z) = 1 + (1)^2 - (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 = -2 < 0$$

$P_0 \in L \setminus \Sigma(L) \Leftarrow$ la normale esiste

$$\text{e} \quad \hat{\nu}(P_0) = \frac{\nabla G_1(P_0)}{\|\nabla G_1(P_0)\|} = \frac{1}{\underbrace{\|\nabla G_1(P_0)\|}_{\left((2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2\right)^{1/2} = \sqrt{16} = 4}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $P_0' \in S \setminus \Sigma(S)$ perché

$$G_1(1, -1, -1) = 1 + 1 - 4 < 0$$

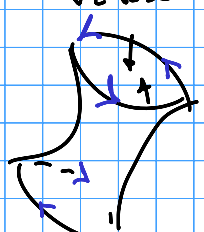
$$G_2(1, -1, -1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\nu}(P_0') = \frac{\nabla G_2(P_0')}{\|\nabla G_2(P_0')\|} = \frac{1}{\|\nabla G_2(P_0')\|} \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix}_{\substack{x=1 \\ y=-1 \\ z=-1}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

(c) VERSO DI $\Sigma(S)$

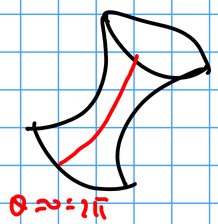


← MOTIVAZIONE RIGOROSA: PRENDO UNA "PARAMETRIZZAZIONE" DI S:
(coordinate cilindriche)

$$\Gamma(\theta, z) = \left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta,\ \sqrt{1+z^2}\sin\theta,\ z\right)$$

$\boxed{1+z^2 = x^2+y^2}$ $\qquad -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

non è iniettivo su 0 / 2π
ma va bene lo stesso



Come è la normale indotta da Γ ??

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = \sqrt{1+z^2}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \end{pmatrix}$$

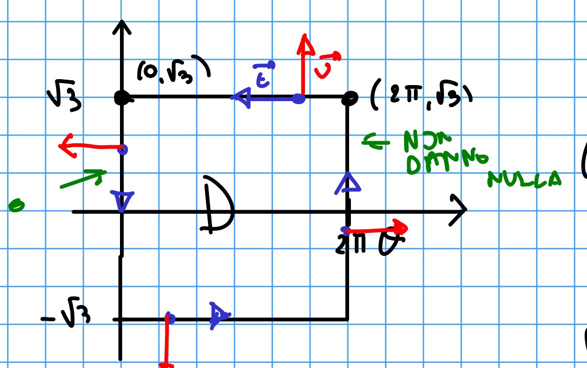
$$\vec{N}(\theta, z) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \sqrt{1+z^2}\,\frac{z}{1+z^2}\,\det\begin{bmatrix} i & -\sin\theta & \cos\theta \\ j & \cos\theta & \sin\theta \\ k & 0 & \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \end{bmatrix} = z\begin{pmatrix} \sqrt{1+z^2}\cos\theta \\ \sqrt{1+z^2}\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$

se $z > 0$ $\vec{N}$ è discorde da $\vec{k}$

[QUESTA PARAMETRIZZAZIONE MI DÀ IL VERSO SBAGLIATO di $\hat{j}$]

PRENDO IL $\underbrace{\text{VERSO SU } \Sigma(S) \text{ indotto da } \Gamma}_{\times}$ e LO INVERTO

· Considero il dominio bidimensionale $D = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}\}$



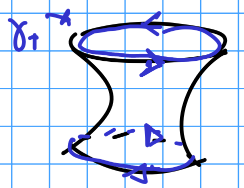
ORIENTO D coerentemente con la normale esterna (∂D = unione di quattro curve (SEGMENTI) | e su ogni curva $\det\begin{bmatrix} \nu_1 & t_1 \\ \nu_2 & t_2 \end{bmatrix} > 0$)

Per esempio il lato superiore è descritto dalla curva: $\gamma(t) = (2\pi, \sqrt{3}) + t\left((0,\sqrt{3}) - (2\pi, \sqrt{3})\right) =$

$0 \le t \le 1 \qquad \gamma(t) = (2\pi - 2\pi t,\ \sqrt{3})$

$\dot{\gamma}(t) = (-2\pi, 0)$

$\Rightarrow$ Ricavo la curva che descrive il pezzo superiore di $\Sigma(S)$



$\Leftarrow$ $\tilde\gamma(t) = \Gamma(\gamma(t)) = \left(2\cos(2\pi(1-t)),\ 2\sin(2\pi(1-t)),\ \sqrt{3}\right)$

ho il verso sbagliato — Γ da la normale sbagliata

Se cambio verso a $\tilde\gamma$ ottengo $\boxed{s = 1-t}$ $\gamma_1(s) = \left(2\cos(2\pi s),\ 2\sin(2\pi s),\ \sqrt{3}\right)$

$0 \le s \le 1$

(oppure $\sigma = 2\pi s$

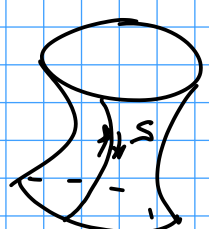
$\gamma_1(\sigma) = \left(2\cos(\sigma),\ 2\sin(\sigma),\ \sqrt{3}\right)$

$0 \le \sigma \le 2\pi$

- Se faccio lo stesso procedimento sul lato inferiore di D trovo una curva che percorre la circonferenza inferiore $\longrightarrow$

$$\gamma_3(\sigma) = \left(\cos(\sigma),\ -\sin(\sigma),\ -\sqrt{3}\right)$$

- I due lati dx/sx di D non danno nulla — lì la Γ non è iniettiva e produce un "bordo fittizio" dove i due lembi si incollano

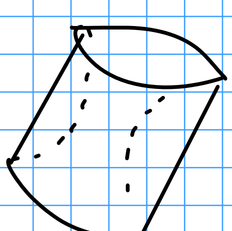


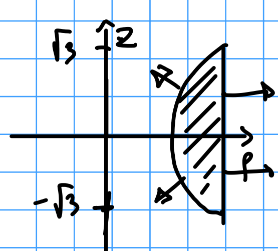
(d.1) Calcolare il flusso

$$\Phi(\vec f,\ \partial D,\ \hat\nu)$$

$$\vec f(x,y,z) = 3xyz^2(y\vec i - x\vec j) + 2z^3x^2\vec k$$

Viene spontaneo usare il teor. della divergenza





$$\mathrm{div}(\vec f) = 3y^2z^2 - 3x^2z^2 + 6x^2z^2 = 3z^2(x^2+y^2)$$

$$\Phi(\vec{g}, \partial D, \hat{\nu}) = \iiint_D 3z^2(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3z^2\left(\iint_{1+z^2 \le x^2+y^2 \le 4} (x^2+y^2)\,dx\,dy\right) dz \overset{\text{coord. polari}}{=} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3z^2\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{1+z^2}}^{2} \rho^2\,\rho\,d\rho\right) dz =$$

$$2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3z^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{1+z^2}}^{2} dz \quad \frac{3\pi}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z^2\left(4^2 - (1+z^2)^2\right) dz =$$

$$3\pi \int_0^{\sqrt{3}} z^2\left(16 - 1 - 2z^2 - z^4\right) dz = 3\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(15z^2 - 2z^4 - z^6\right) dz =$$

$$3\pi \left[15\frac{z^3}{3} - 2\frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi\sqrt{3}\left(5 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 9}{5} - \frac{27}{7}\right) =$$

$$3\pi\sqrt{3}\left(\frac{525 - 126 - 135}{35}\right) = 3\pi\sqrt{3}\,\frac{264}{35} = \boxed{\pi\sqrt{3}\,\frac{792}{35}}$$

$$\Vert$$

$$\circledast$$

(d.2) $\Phi(\vec{g}, S, \hat{\nu})$

qui non si può usare la divergenza perché $S \neq \partial$(qualcosa)

(anche perché $\Sigma(S) \neq \emptyset$, mentre per qualunque D $\Sigma(\partial D) = \emptyset$)

Dovrei usare la definizione (trovare una parametrizzazione - — fare i calcoli)

OPPURE POSSO TENTARE IL "TRUCCO"

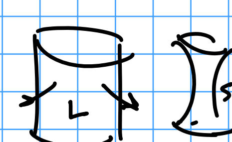
$$\circledast = \Phi(\vec{g}, \partial D, \hat{\nu}) = \Phi(\vec{g}, S, \hat{\nu}) + \Phi(\vec{g}, L, \hat{\nu})$$

può essere più facile da calcolare PROVIAMO

SU L uso le coordinate cilindriche:

$$\Gamma(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, z) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \quad -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = 2\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{N} = 2\det\begin{bmatrix} i & -\sin\theta & 0 \\ j & \cos\theta & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

VA BENE COME NORMALE USCENTE DA D!!

$$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ -\sqrt{3}\, z \le \sqrt{3}}} \vec{f}(2\cos\theta, 2\sin\theta, z)\, \vec{N}(\theta, z)\, d\theta\, dz =$$

$$\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ -\sqrt{3}\le z \le 3}} \left(3xyz^2\underbrace{(y\vec{i} - x\vec{j})} + 2z^3x^2\vec{k}\right)\left(\underbrace{x\vec{i} + y\vec{j}}\right) d\theta\, dz = 0$$

$0\cdot\vec{k}$

$(x = 2\cos\theta \quad y = 2\sin\theta)$

$(y\vec{i} - x\vec{j})\cdot(x\vec{i} + y\vec{j}) = 0$

$3xyz^2(yx - xy) = 0$

$$\Phi(L) = 0 \Rightarrow \Phi(S) = \Phi(\partial D) = \pi\sqrt{3}\,\frac{792}{35}$$

su L $\vec{f}$ e $\hat{\nu}$ sono ortogonali

VEDIAMO CHE CALCOLI DOVREMMO FARE PER TROVARE $\Phi(S)$ usando la definizione

$-\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) \Leftarrow$ usiamo $\Gamma(\theta, z) = \left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\sin\theta, z\right)$

$$\vec{N}(\theta, z) = z\begin{pmatrix} \sqrt{1+z^2}\cos\theta \\ \sqrt{1+z^2}\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$

Devo fare

$$\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ -\sqrt{3}\le z \le \sqrt{3}}} z\,\vec{f}\left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\sin\theta, z\right)\left(\underbrace{\sqrt{1+z^2}\cos\theta}_{x}\,\vec{i} + \underbrace{\sqrt{1+z^2}\sin\theta}_{y}\,\vec{j} - \vec{k}\right) d\theta\, dz$$

$x = \sqrt{1+z^2}\cos\theta$
$y = \sqrt{1+z^2}\sin\theta$

$$= \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ -\sqrt{3}\le z \le \sqrt{3}}} z\left(3xyz^2\underbrace{(y\vec{i} - x\vec{j})} + 2z^3x^2\vec{k}\right)\left(\underbrace{x\vec{i} + y\vec{j}} - \vec{k}\right) d\theta\, dz =$$

perpendicolari

$$\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ -\sqrt{3}\le z \le \sqrt{3}}} -z\, 2z^3x^2\, d\theta\, dz = -2\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ -\sqrt{3}\le z \le \sqrt{3}}} z^4(1+z^2)\cos^2\theta\, d\theta\, dz$$

$$\Phi(\vec{g}, S, \hat{j}) = 2 \cdot 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta}_{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} z^4 (1+z^2)\, dz =$$

$$4\pi \int_0^{\sqrt{3}} (z^4 + z^6)\, dz = 4\pi \left[\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \right]_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \left(\frac{9}{5} + \frac{27}{7} \right) =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{35} \left(63 + 135 \right) = \frac{4\sqrt{3}}{35} (198) = \frac{792}{35} \sqrt{3}\, \pi$$

TORNA CON QUELLO DI PRIMA