Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

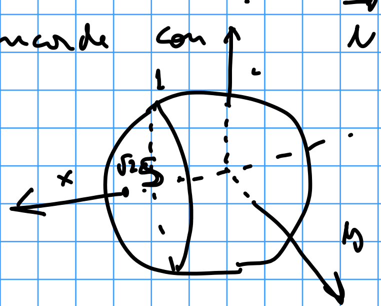
Lezione 60 29/04/2020

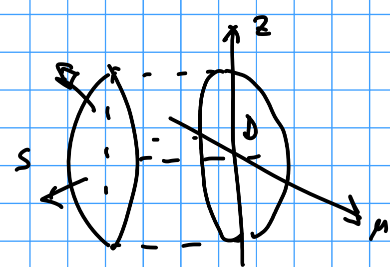
(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESERCIZI

- $S = \{x^2+y^2+z^2 = 2 \;,\; x \geq 1\}$
- $\vec{f} = xz^2\left(2(x-1)e^y\,\vec{i} + (y-e^y)\,\vec{j} - z\,e^y\,\vec{k}\right)$

(a) Cercare una parametrizzazione di S che induca la normale concorde con $\vec{i}$





Posso vedere S come grafico $x = g(y,z)$, precisamente

$$x = g(y,z) = \sqrt{2-y^2-z^2} \qquad \text{per} \quad (y,z) \in D = \{y^2+z^2 \leq 1\}$$

cioè uso $\boxed{\Gamma(u,v) = \left(\sqrt{2-u^2-v^2},\, u,\, v\right)}$ Vediamo che Γ è una $\underbrace{\text{parametrizzazione}}_{\text{OK} \quad g \text{ è } C^1}$ e calcoliamo $\vec{N}_\Gamma$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{-u}{\sqrt{2-u^2-v^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{-v}{\sqrt{2-u^2-v^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec N = \text{"det"} \begin{bmatrix} i & \frac{-u}{\sqrt{\ }} & \frac{-v}{\sqrt{\ }} \\ j & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -u/\sqrt{2-u^2-v^2} \\ -v/\sqrt{2-u^2-v^2} \end{bmatrix}$$

concorde con $\vec i$

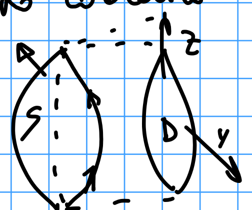
ok

Se voglio $\hat\nu(P)$ quando $P=(x,y,z)\in S$ devo fare così:

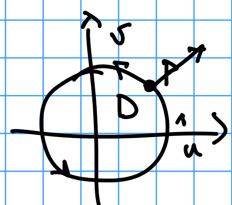
$$P=\Gamma(y,z) \Rightarrow \vec N(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ -y/\sqrt{2-y^2-z^2} \\ -z/\sqrt{2-y^2-z^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \|\vec N\| = \sqrt{1+\frac{y^2}{2-y^2-z^2}+\frac{z^2}{2-y^2-z^2}} = \sqrt{\frac{1}{2-y^2-z^2}}$$

$$\hat\nu(P) = \frac{\vec N(P)}{\|\vec N(P)\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2-y^2-z^2} \\ -y/(2-y^2-z^2) \\ -z/(2-y^2-z^2) \end{bmatrix}$$

(b) Scrivere $\Sigma(S)$ e una curva che percorre $\Sigma(S)$ in modo coerente con $\hat\nu$. DEVO PRENDERE UNA CURVA



$\gamma:[0,b]\to\mathbb{R}^2$ che descrive ∂D (nel modo giusto!)



$$\gamma(t) = \cdot(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$0\le\theta\le 2\pi \qquad ([0,b]=[0,2\pi])$$

Se voglio verificare in maniera rigorosa che γ è coerente con la normale esterna di D devo fare così:

Prendo un punto $P_0\in\partial D$. TROVO θ_0 : $P_0=\gamma(\theta_0)$

Considero $\vec t = \dot\gamma(\theta_0)$ (verso di γ in P_0 — TANGENTE A ∂D)

$\vec n(P_0)$ normale unitaria uscente $\vec n = \frac{P_0}{\|P_0\|} = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$

($\vec n$ lo trovo con $\nabla G(P_0)$ dove $G(u,v)= u^2+v^2-2$ $\nabla G = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \end{pmatrix}$)

IL VERSO DI γ in P_0 è OK <u>**SE**</u> $\det[\vec n, \vec t] > 0$

$$\det\begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} = \sqrt2 > 0$$

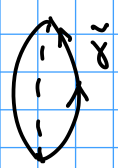
<u>DUNQUE</u> $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ è ok per D

$\Rightarrow$ prendo $\tilde\gamma(\theta) = \Gamma(\gamma(\theta)) = \left(\underset{\uparrow\ \sqrt{2-\cos^2\theta-\sin^2\theta}}{1}, \cos\theta, \sin\theta\right)$

$\tilde{\gamma}$ descrive $\Sigma(S)$ col verso coerente con $\hat{\nu}$. INOLTRE

$\Sigma(S) = \tilde{\gamma}[0, 2\pi] = \{(1, y, z) : y^2 + z^2 = 1\} = \Gamma(\partial D)$

$= \{(1, u, v) : u^2 + v^2 = 1\}$



(c) Calcolare $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$. Dovrei farlo con la def di flusso: se uso la parametrizzazione Γ (di prima)

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_D \vec{f}\left(\sqrt{2-u^2-v^2}, u, v\right) \cdot \vec{N}(u,v)\, du\, dv =$$

$$\iint_D \left(f_1\left(\sqrt{2-u^2-v^2}, u, v\right) - f_2 \frac{\left(\sqrt{2-u^2-v^2}\right) u}{\sqrt{2-u^2-v^2}} - f_3 \frac{\left(\sqrt{2-u^2-v^2}\; v\right)}{\sqrt{2-u^2-v^2}} \right) du\, dv$$

dovrei mettere le espressioni di f_1, f_2, f_3 e fare conti...

TENTATIVO ALTERNATIVO: CERCO DI USARE LA DIV.

$$\operatorname{div} \vec{f} = (4x-2)z^2 e^y + x(1-e^y)z^2 - 3x e^y z^2 =$$

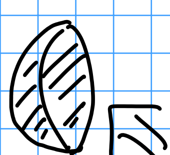
$$4x\cancel{e^y}z^2 - 2e^y z^2 + x z^2 - \cancel{x e^y} z^2 - 3\cancel{x e^y} z^2 = \boxed{-2e^y z^2 + x z^2}$$

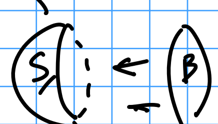
$$\left[\; \vec{f} = x z^2 \left(2(x-1) e^y \vec{i} + (y - e^y)\vec{j} - z e^y \vec{k} \right) = 2x(x-1)z^2 e^y \vec{i} + x(y-e^y) z^2 \vec{j} - x z^3 e^y \vec{k} \;\right]$$

Come uso il teor della div!! S non è $\partial\Omega$ con Ω dominio regolare ($\Sigma(S) \neq \phi$ mentre $\Sigma(\partial\Omega) = \phi$)

Posso introdurre $\Omega := \{ x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ x \ge 1 \}$

$$\partial\Omega = S \cup \underbrace{\{(1, y, z) : y^2 + z^2 \le 1\}}_{B} =$$





Posso provare a usare la divergenza su $\bar{\Omega}$ $\Longrightarrow$

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy\,dz$$

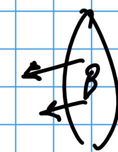
$$\parallel$$

$$\underbrace{\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma}_{①} + \underbrace{\iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds}_{②} \leftarrow =0$$

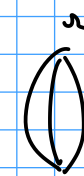
① è quello che cerco

② posso trovare e calcolarlo

② $= \iint_{\{y^2+z^2\le 1\}} \vec{f}(1,y,z)\cdot\vec{i}\, dy\,dz =$



$$\iint_{\{y^2+z^2\le 1\}} \underbrace{f_1(1,y,z)}_{\text{fa zero (se metti } x=1 \text{ ..)}}\, dy\,dz$$



① $= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{f} = \iiint_{\Omega} xz^2 - 2e^y z^3$

$$= \int_1^{\sqrt2}\left(\iint_{\{y^2+z^2\le 2-x^2\}} xz^2 - 2e^y z^2\, dy\,dz\right)dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} y=\rho\cos\theta \\ z=\rho\sin\theta \end{array}\right) \qquad \int_1^{\sqrt2}\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left(x\rho^2\sin^2\theta - 2e^{\rho\sin\theta}\sin^2\theta\right)\rho\, d\rho\right)dx$$

$$\int_1^{\sqrt2} x\left(\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta}_{\pi}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\rho^2\, d\rho - \int_1^{\sqrt2}\left(2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2-x^2}} e^{\rho\sin\theta}\underbrace{(\rho\sin\theta)}_{\sigma}\,\underbrace{\sin\theta\, d\rho}_{d\sigma}\right)\right)dx =$$

$\rho\sin\theta = \sigma$

$\sin\theta\, d\rho = d\sigma$

$$\int_1^{\sqrt2} x\,\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx - 2\int_1^{\sqrt2}dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta\sqrt{2-x^2}} e^{\sigma}\sigma\, d\sigma =$$

$$\frac{\pi}{3}\int_1^{\sqrt2} x\left(1-x^2\right)^{3/2}dx - 2\int_1^{\sqrt2}dx\int_0^{2\pi}d\theta\left(\left[\sigma e^{\sigma} - e^{\sigma}\right]_0^{\sin\theta\sqrt{2-x^2}}\right) =$$

$1-x^2=t \qquad -2x\,dx = dt$

$$\frac{\pi}{3}\int_0^{-1}\left(-\frac{dt}{2}\right)(t)^{3/2} - 2\int_1^{\sqrt2}dx\int_0^{2\pi}\left[\left(\sin\theta\sqrt{2-x^2}-1\right)e^{\sin\theta\sqrt{2-x^2}} - 1\right]d\theta$$

VEDIAMO COME CAVARCI
QUALCOSA LA PROSSIMA VOLTA

NON RIESCO A CALCOLARLO :(