Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 59 28/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Def. Se Ω aperto di $\mathbb{R}^3$ e $\vec{f}:\Omega \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 chiamo divergenza di $\vec{f}$ la funzione scalare

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}$$

$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \text{ se } \Omega \subset \mathbb{R}^n \right)$

RICORDA CHE f si dice C^1 su D chiuso se f è C^1 su un aperto Ω che contiene D.

TEOREMA DELLA DIVERGENZA Se Ω è un aperto regolare LIMITATO a tratti in $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^n)$ e $\vec{f}: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^1(\overline{\Omega})$

Allora vale

$$\iiint_{\overline{\Omega}} \operatorname{div} \vec{f} \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\overline{\Omega}} \vec{f}\cdot\hat{\nu} \, d\sigma$$

ATTENZIONE Quando scrivo l'integrale su $\partial\overline{\Omega}$ $(\partial\Omega)$ SOTTINTENDO che $\hat{\nu}$ è scelto USCENTE DA $\overline{\Omega}$ / Ω

• Si può esplicitare $\hat{\nu}$ e l'integrale su $\partial\Omega$ ricordando che

$$\Omega = \{ G_1 < 0 \ ... \ G_m < 0 \}$$ con le solite ipotesi su $G_1 \ldots G_N$

∇G_i punta fuori Ω ($\nabla G_i \neq 0$ e (indipendenti tra loro ...)) dove $G_i = 0$

$$\partial\Omega = \{G_1 = 0\} \cup \{G_2 = 0\} \cup \ldots \{G_m = 0\}$$

$$\Sigma^*(\partial\Omega) = \{ P \in \bar{\Omega} \text{ per cui } \exists\, i \neq j \text{ con } G_i(P) = G_j(P) = 0 \}$$

se $P \in \partial\Omega \setminus \Sigma^*(\partial\Omega) \Rightarrow \hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}$ dove i è l'unico indice con $G_i(P) = 0$

$$S_1 : \{ G_1 = 0,\ G_i \neq 0\ i \neq 1 \} \cup \ldots \cup S_m = \{ G_m = 0,\ G_i \neq 0\ i \neq m \}$$

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{m} \iint_{S_i} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

DIM. (PARZIALE) CASO $\bar{\Omega}$ è normale rispetto a tutti gli assi

① asse z $\quad \bar{\Omega} = \{ (x,y,z) : (x,y) \in A_1 \quad \phi_1(x,y) \leq z \leq \Psi_1(x,y) \}$

dove A_1 è un dominio regolare (chiuso) $\Phi_1 \leq \Psi_1 : A_1 \to \mathbb{R}$, C^1.
$A_1 \subset \mathbb{R}^2$

② asse y $\quad \bar{\Omega} = \{ (x,y,z) : (x,z) \in A_2 \quad \phi_2(x,z) \leq y \leq \Psi_2(x,z) \}$

dove A_2 è un dominio regolare (chiuso) $\Phi_2 \leq \Psi_2 : A_2 \to \mathbb{R}$, C^1.
$A_2 \subset \mathbb{R}^2$

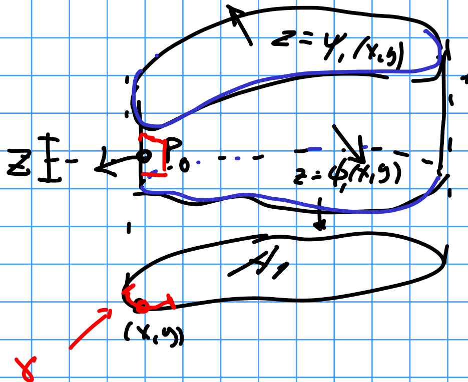
③ asse x $\quad \bar{\Omega} = \{ (x,y,z) : (y,z) \in A_3 \quad \phi_3(y,z) \leq x \leq \Psi_3(y,z) \}$

dove A_3 è un dominio regolare (chiuso) $\Phi_3 \leq \Psi_3 : A_3 \to \mathbb{R}$, C^1.
$A_3 \subset \mathbb{R}^2$

Considero $\vec{f} = f_3 \vec{K} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{f} = \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$. Allora

$$\iiint_{\bar{\Omega}} \frac{\partial f_3}{\partial z}\, dx\,dy\,dz \overset{(\text{uso } (1))}{=} \iint_{A_1} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\Psi_1(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)\, dz \right) dx\,dy =$$

$$\iint_{A_1} \Big[\underbrace{f_3(x,y,\Psi_1(x,y))}_{\iint_{S^+} (f_3 \vec{K}) \cdot \hat{\nu}\, d\sigma} - \underbrace{f_3(x,y,\phi_1(x,y))}_{\iint_{S^-} (f_3 \vec{K}) \cdot \hat{\nu}\, d\sigma} \Big] dx\,dy = (*)$$



$$\partial\bar\Omega = \{(x,y,\psi_1(x,y)) : (x,y)\in A_1\} \leftarrow S^+$$
$$\cup\ \{(x,y,z) : (x,y)\in\partial A_1\ \ \phi_1(x,y)\le z\le \psi_1(x,y)\} \leftarrow S_e$$
$$\cup\ \{(x,y,\phi_1(x,y)) : (x,y)\in A_1\} \leftarrow S^-$$

OSSERVO CHE su $S_e\setminus\Sigma(S_e)$ $\hat\nu \perp \vec k$. (LO VEDO A OCCHIO) Se lo voglio dimostrare prendo $P_0\in S_e\setminus\Sigma(S_e)$ $P=(x,y,z)$ con $(x_0,y_0)\in\partial A_1$ $\phi_1(x,y)<z_0<\psi_1(x,y)$. Dato che ∂A_1 è regolare trovo una curva $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to\partial A_1$

γ regolare con $\gamma(0)=(x,y)$. Posso definire una

$\Gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\times]z-\delta,z+\delta[$ $\quad\Gamma(t,z)=\gamma(t)+z\vec k$

$P_0=\Gamma(0,z_0)$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}=\underset{\text{piano } xy}{\gamma'(t)} \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial z}=\vec k \implies \vec N_\Gamma=\gamma'(t)\otimes\vec k \text{ è perpendicolare a } \vec k$$

$$\implies \boxed{\iint_{S_e}(f_3\cdot\vec k)\cdot\hat\nu\, d\sigma = 0}$$

perpendicolari

- S^+ è il grafo di $z=\psi(x,y)\implies$

$\vec N$ (costruito a partire da $\boxed{\Gamma(u,v)=(u,v,\psi_1(u,v))}$

è $-\frac{\partial\psi}{x}\vec i-\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec j+\underline{\underline{\vec k}}=\vec N(x,y)$ $\leftarrow$ NORMALE CONCORDE CON $\vec k$

$$\implies\iint_{S^+}f_3\vec k\cdot\hat\nu\,d\sigma=\iint_{A_1}\left(f_3(x,y,\psi_1(x,y))\underline{\underline{\vec k}}\right)\vec N(x,y)\,dx\,dy=$$

$$\iint_{A_1}f_3(x,y,\psi_1(x,y))\,dx\,dy$$

$\psi_1 \ldots$

- S^- è il grafo di $z=\phi_1(x,y)\implies$

$$\iint_{S^-} (\vec{f}\,\vec{k})\,\hat{\nu}\,d\sigma = -\iint_{A_1} f_3(x,y,\phi_1(x,y))\,dx\,dy$$

DUNQUE $\iiint_{\Omega} \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = (*) = \iint_{\partial\Omega} (f_3\,\vec{k})\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$

- FACCIO LO STESSO CALCOLO CON $\vec{f} = f_2\,\vec{j} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz \underset{\text{USO LA } (2)}{=} \dots = \iint_{\partial\Omega} (f_2\cdot\vec{j})\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

- FACCIO LO STESSO CALCOLO CON $\vec{f} = f_1\,\vec{i} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \underset{\text{USO LA } (3)}{=} \dots = \iint_{\partial\Omega} (f_1\cdot\vec{i})\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

SOMMO TUTTO

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} (f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k})\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

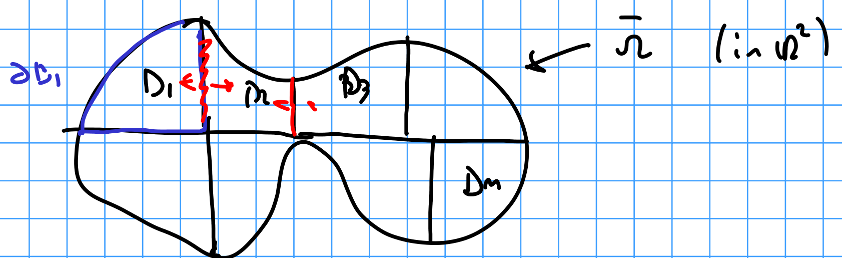
$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

DIMOSTRATO SE SI HANNO LE (1) (2) (3)

NEL CASO GENERALE SI PUÒ VEDERE CHE

UN $\bar{\Omega}$ come nelle ipotesi si può scomporre come

$\bar{\Omega} = D_1 \cup D_2 \cup \dots D_m$ dove ogni D_i verifica (1) (2) (3)

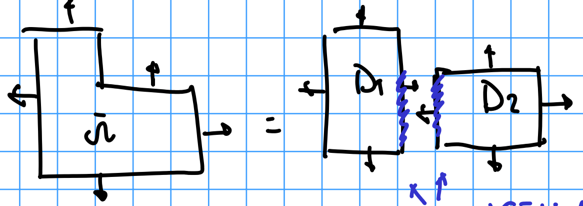


Su ogni D_i vale il teorema $\iiint_{D_i} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D_i} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$

Se sommo su $i = 1 \dots m$

tutti gli integrali sui bordi "fittizi" si cancellano

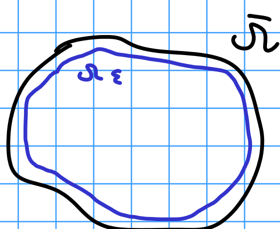
$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\partial D_i} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$



si cancellano perché le normali sono opposte

OSS. Si potrebbe considerare $\vec{f}$ continua su $\bar{\Omega}$ e C^1 su Ω –
IN QUESTO CASO DEVO METTERE PER IPOTESI $\operatorname{div}\vec{f}$ INTEGRABILE SU Ω

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$$



$\bar{\Omega}_\varepsilon \subset \Omega$ $\qquad$ $\Omega = \bigcup_{\varepsilon>0} \Omega_\varepsilon$

scrivo il teorema su Ω_ε e faccio tendere $\varepsilon \to 0$

OSS. Con lo stesso si dimostra $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ reg. a tratti limitato

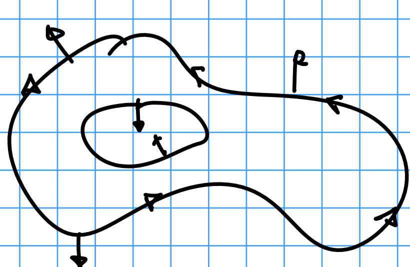
$$\iint_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \underbrace{(f_1\vec{i} + f_2\vec{j})\cdot\hat{\nu}\, ds}_{\vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma}$$

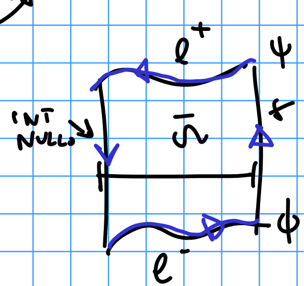
$f_1\ f_2\ C^1(\bar{\Omega})$

dove $\partial\Omega$ è descritta da $\gamma_0 \ldots \gamma_m$ curve chiuse regolari a tratti

$\left(\int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds := \sum_{i=0}^{m} \int_{\gamma_i} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds\right)$ e γ_i sono percorse con verso

coerente con $\hat{\nu}$ = normale uscente a $\bar{\Omega}$





$f_2\vec{j}$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial y}\, dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f_2}{\partial y}\, dy\right) dx =$$

$$\ldots \int_a^b \underbrace{f_2(x,\psi(x))}_{\int_{\ell^+}} - \underbrace{f_2(x,\phi(x))}_{\int_{\ell^-}}$$

TEOREMA (GAUSS-GREEN) Se $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio chiuso reg. a tratti limitato $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ $C^1(D)$

$$\vec{f} := f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial D} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$ γ_i descrivono ∂D coerentemente con $\hat{\nu}$

HO CANCELLATO PER ERRORE IL FILE DA QUI IN AVANTI $\longrightarrow$ VEDERE IL VIDEO

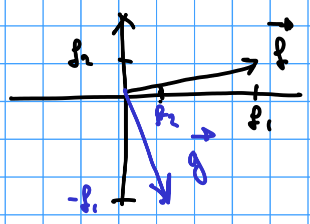
QUELLO CHE SEGUE È STATO RISCRITTO IN MODO PIÙ SUCCINTO

DIMOSTRAZIONE DI GAUSS GREEN

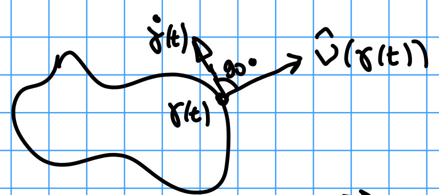
Basta applicare il teorema della divergenza al campo $\vec{g} = f_2 \vec{i} - f_1 \vec{j}$.

Chiaramente $\iint \operatorname{div}(\vec{g}) =$ INTEGRALE A DESTRA

Per vedere che vale la formula notiamo che $\vec{g}$ = RUOTATO DI $\vec{f}$ di $90°$ in senso orario.



$\vec{g} = f_2 \vec{i} - f_1 \vec{j}$



Allora se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ percorre ∂D coerentemente, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ allora

$$\hat{\nu}(\gamma(t)) = (\dot{\gamma}_2(t), -\dot{\gamma}_1(t))$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{g} \cdot \hat{\nu}\, ds = \int_a^b \vec{g}(\gamma(t)) \cdot \hat{\nu}(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt =$$

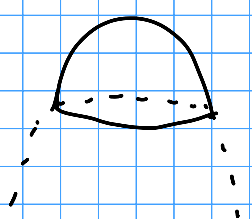
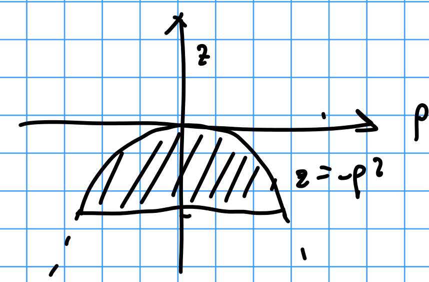
$$= \int_a^b \left(f_2(\gamma(t)) \vec{i} - f_1(\gamma(t)) \vec{j} \right) \frac{\left(\dot{\gamma}_2(t) \vec{i} - \dot{\gamma}_1(t) \vec{j} \right)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt =$$

$$= \int_a^b f_2(\gamma(t))\,\dot\gamma_2(t) + f_1(\gamma(t))\,\dot\gamma_1(t)\,dt =$$

$$\int_a^b \vec f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_\gamma \vec f\cdot d\vec s$$

ESEMPIO $\quad D := \{(x,y,z) : -1 \le z \le -x^2-y^2\}$; $S = \partial D$

$\vec f(x,y,z) := x\vec i + y\vec j + z^2\vec k$

D →  rotazione di 

CALCOLARE IL FLUSSO $\Phi(\vec f, \partial D, \hat\nu)$ dove $\hat\nu$ è uscente da D.

I MODO (Definizione di flusso). Se $S_1 = \{z=-x^2-y^2,\ -1\le z\le 0\}$, $S_2 = \{z=-1,\ x^2+y^2\le 1\}$

allora $\partial D = S_1\cup S_2$. Inoltre S_1 è grafico di $g_1(x,y) = -x^2-y^2$ e S_2 è grafico di $g_2(x,y)=-1$, entrambe per $(x,y)\in B := \{x^2+y^2\le 1\}$.
Dato che "S_1 è sopra S_2", cioè $g_1\ge g_2$, la normale uscente da D è
$$\vec N_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} g_1 \\ -\frac{\partial}{\partial y} g_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$
se $(x,y)\in S_1$ mentre è
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec k \quad \text{se } (x,y)\in S_2. \quad \Longrightarrow$$

• $$\iint_{S_1} \vec f\cdot\hat\nu\,d\sigma = \iint_B \vec f(x,y,-x^2-y^2)\cdot\left(2x\vec i+2y\vec j+\vec k\right)dx\,dy =$$

$$\iint_B \left(2x^2+2y^2+(-x^2-y^2)^2\right)dx\,dy = \quad \text{(coord. polari)}$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(2\rho^2+\rho^4\right)\rho\,d\rho \overset{(s=\rho^2)}{=} 2\pi\int_0^1\left(2s+s^2\right)\frac{d\rho}{2} =$$

$$\pi\left[s^2 + \frac{s^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\bullet \iint_{S_2} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{B} \vec{f}(x,y,-1)\cdot(-k)\, dx\,dy = -\iint_{B} 1\, dx\,dy = -\pi$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \frac{4}{3}\pi - \pi = \frac{\pi}{3}$$

CON LA DIVERGENZA $\quad \operatorname{div}\vec{f} = 1+1+2z = 2+2z$

$$\iint_D \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy = \iint_D (2+2z)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}(2+2z)\,dz \iint_{x^2+y^2\le -z} dx\,dy =$$

$$\int_{-1}^{0}(2+2z)\int_0^{2\pi}d\theta \int_0^{\sqrt{-z}} \rho\, d\rho = 2\pi\int_{-1}^{0}(2+2z)\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{-z}} dz =$$

$$\pi\int_{-1}^{0}(2+2z)(-z)\,dz = \pi\int_{-1}^{0}(-2z-2z^2)\,dz = \pi\left[-z^2-\frac{2}{3}z^3\right]_{-1}^{0} = \pi\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

TORNA