Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 58 27/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricordiamo che una superficie S regolare a tratti è ottenuta "incollando" un numero finito di superfici parametriche:

- $S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ $\quad S_i$ è una sup. par.
- $i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j \subset \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j)$
- $i \neq j \neq k \Rightarrow S_i \cap S_j \cap S_k$ contiene al più un numero finito di pti.

Def. (integrale di sup.) Se S è una sup. regolare a tratti e $f: S \to [-\infty, \infty]$ dico che

- f è misurabile su S se, data una decomposizione $S_1 \ldots S_m$ di S $\Rightarrow$ f è misurabile su ogni S_i
- Se f è misurabile, $f \geq 0$ definisco

$$\iint_S f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{m} \iint_{S_i} f \, ds$$

(SI DIMOSTRA CHE IL VALORE DELL' INTEGRALE NON DIPENDE DALLA DECOMPOSIZIONE)

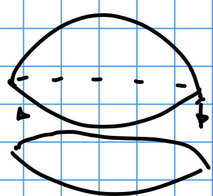
· Dico che f è integrabile su S se f è misurabile e se

$$\iint_S f^+ \, d\sigma < +\infty \quad e \quad \iint_S f^- \, d\sigma < +\infty .$$ In tal caso

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_S f^+ \, d\sigma - \iint_S f^- \, d\sigma$$

<u>PER ESEMPIO</u> $\quad f(x,y,z) = z \quad$ e

$$S = \underbrace{\{x^2+y^2+z^2 = 1, \ z \geq 0\}}_{S_1} \cup \underbrace{\{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 1\}}_{S_2}$$



$=$ frontiera di $B^+ := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \ , z \geq 0\}$

$$S = \partial B^+$$

Sia S_1 che S_2 sono superfici parametriche: sono i grafici:

$z = f_1(x,y)$ dove $f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $\quad z = f_2(x,y)$ dove $f_2(x,y) = 0$

entrambe definite su $\{x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_{S_1} z \, d\sigma + \underbrace{\iint_{S_2} z \, d\sigma}$$

fa zero perché su ogni $(x,y,z) \in S$ $f(x,y,z) = z = 0$

Per il primo posso usare la parametrizzazione "cartesiana"

$$\Gamma(u,v) = (u, v, f_1(u,v)) \to \vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial u} f_1 \\ -\frac{\partial}{\partial v} f_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \| \vec{N}_\Gamma(u,v) \| = \sqrt{1 + \|\nabla f_1(u,v)\|^2} =$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2 + \left(\frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-u^2-v^2}}$$

$$\iint_{S_1} z \, d\sigma = \iint_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} \sqrt{\cancel{1-u^2-v^2}} \sqrt{\frac{1}{\cancel{1-u^2-v^2}}} \, du \, dv =$$

$$\iint_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} 1 \, du \, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \pi$$

DUNQUE $\iint_{\partial B^+} z \, d\sigma = \pi$ $\quad B^+ = \{x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}$

ESERCIZIO ANALOGO

Stessa $S = \partial B^+ = S_1 \cup S_2$

$$\iint_S x \, d\sigma = \iint_{S_1} x \, d\sigma + \iint_{S_2} x \, d\sigma =$$

$$\iint_{\{u^2+v^2\le 1\}} u \frac{du\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} + \iint_{\{u^2+v^2 \le 1\}} u \, du\,dv =$$

$\sigma(u,v) = (u,v,0) \to \vec{N}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|\vec{N}_\sigma\| = 1$

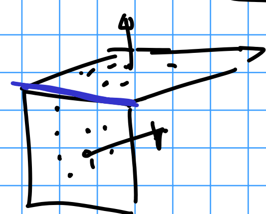
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \, \rho\cos\theta =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta}_{=0} \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta}_{=0} \int_0^1 \rho^2 d\rho \Rightarrow 0$$

FLUSSO di un campo attraverso una S ??

MI SERVE UNA DEFINIZIONE DI SUPERFICIE ORIENTATA

$(S, \hat{\nu})$



$\leftarrow$ PROBLEMA DI RACCORDARE LA $\hat{\nu}$ quando passo da una faccia all'altra

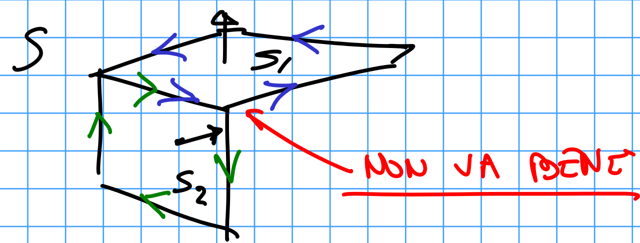
$S = S_1 \cup \dots \cup S_m$

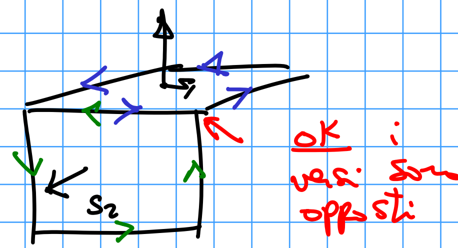
$\hat{\nu}$ la posso considerare su ogni $S_i \setminus \Sigma(S_i)$

Def. Dico che $(S, \hat{\nu})$ è una superficie orientata se:

- S è una superficie regolare a tratti
- $\hat{\nu} : S \setminus \Sigma^*(S) \to \mathbb{R}^3$, $\hat{\nu}$ continua, $\|\hat{\nu}\| = 1$;
- Per ogni $P \subset S$ P regolare $\hat{\nu}$ è normale a S in P
- Esiste una decomposizione di S fatta da $S_1 \dots S_m$ tali che ogni S_i $(S_i, \hat{\nu})$ è una sup parametrica orientata e

$\boxed{\text{se } P \in \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j) \text{ il verso di } \Sigma(S_i) \text{ in } P \text{ (coerente con } \hat{\nu} \text{ su } S_i) \text{ è opposto al verso di } \Sigma(S_j) \text{ in } P \text{ (coerente con } \hat{\nu} \text{ su } S_j)}$





$\sim$ $(S, \hat{\nu})$ deve essere $(S_1, \hat{\nu}_1) \vee \dots \vee (S_M, \hat{\nu}_M)$ in modo che nei bordi i versi si cancellano

TEOREMA $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto. Se $\bar{\Omega}$ è un dominio regolare (LIMITATO) e a tratti in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\partial \bar{\Omega}$ $(= \partial \Omega)$ è una superficie regolare a tratti è orientabile e esiste $\hat{\nu}$ tale che $(\partial \bar{\Omega}, \hat{\nu})$ è una superficie ORIENTATA.

IN QUESTO CASO CONSIDERIAMO SEMPRE come $\hat{\nu}$ LA NORMALE USCENTE A $\bar{\Omega}$ (a Ω).

Se esplicitiamo questo risultato: $\bar{\Omega} = \{P \in \mathbb{R}^3 : G_1(P) \le 0, \dots, G_k(P) \le 0\}$

$\bar{\Omega}$ regolare a tratti:

con $\nabla G_i(P) \neq \vec{0}$ $i = 1..k$ $\forall P \in \{G_i = 0\}$

\+ se $G_i(P) = G_j(P) = 0 \Rightarrow \nabla G_i(P)$ e $\nabla G_j(P)$ lin. ind.

se $G_i(P) = G_j(P) = G_h(P) \Rightarrow \nabla G_i(P), \nabla G_j(P), \nabla G_h(P)$ lin. ind.

(e non ci sono punti in cui più di tre G_i si annullano)

Allora $S = \partial \bar{\Omega} = \partial \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{k} \{P : G_i(P) = 0\}$

e i punti REGOLARI di $\partial \bar{\Omega}$ sono i punti in cui uno solo G_i si annulla

$$S \setminus \Sigma^*(S) = \bigcup_{i=1}^{k} \{P : G_i(P) = 0,\ G_j(P) < 0 \ j \neq i\}$$

Se $P \in S \setminus \Sigma^*(S) \Rightarrow \hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}$

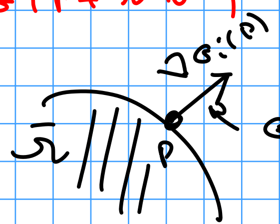
dove i è l'unico indice con $\nabla G_i(P) \neq 0$

Questo $\hat{\nu}$ è uscente da $\overline{\Omega}$ perché $\vec{v} = \nabla G_i(P)$ è uscente; infatti

se faccio $G_i'(P)(\vec{v}) = \nabla G(P) \cdot \vec{v} = \|\nabla G(P)\|^2 > 0$

DUNQUE $G_i'(P)(\vec{v}) > 0$; dato che $G_i(P) = 0 \Rightarrow$

$G(P + t\vec{v}) > 0$ se $t > 0 \Rightarrow P + t\vec{v} \notin \overline{\Omega}$



$G > 0$ (sono fuori da $\overline{\Omega}$)

Nel Teorema si dimostra (NO! NON LO FAREMO) che $(S, \hat{\nu})$ è effettivamente una sup orientata. (segue dal DINI)

ESEMPI (i soliti)

- LA SFERA $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è frontiera della palla $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$. COME TALE S è orientabile mediante la normale uscente da B

Dato che B è definito da un solo vincolo $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \le 0$

$$\Rightarrow \nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \hat{\nu} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(tutti i punti di S sono regolari, $\hat{\nu}(P)$ è definito $\forall P \in S$ $\hat{\nu}(P) = \vec{P}$ $\vec{P} = P - O$)

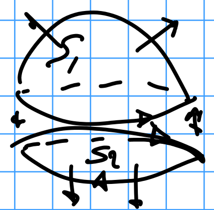
- $B^+ = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \ z \ge 0\} \leftarrow$ DOMINIO REGOLARE

DUE VINCOLI $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ $\quad \nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$H(x,y,z) = -z$ $\quad \nabla H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$S = \partial B^+ = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \ge 0\} \cup \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \ z = 0\} =$

$$\underbrace{\{x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}}_{S_1} \cup \underbrace{\{(x,y,0) : x^2+y^2\leq 1\}}_{S_2}$$



PUNTI REGOLARI $= \{x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\} \cup \{(x,y,0),\ x^2+y^2<1\}$

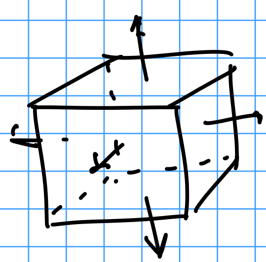
PUNTI SINGOLARI $= \{(x,y,0)\ \ x^2+y^2=1\}$

$$\Sigma(S_1) = \Sigma(S_2)$$

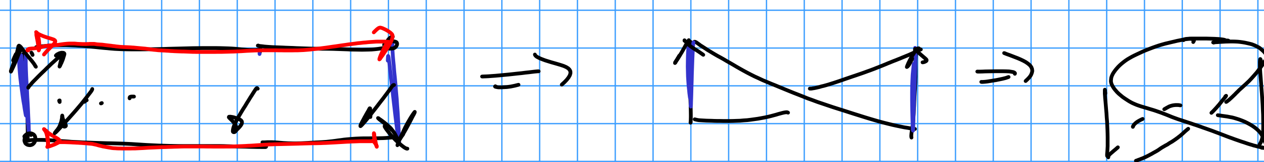
SU $S_1 \setminus \Sigma^*(S)$ la normale $\hat{\nu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

SU $S_2 \setminus \Sigma^*(S)$ la normale $\hat{\nu} = -\vec{k}$

. IL CUBO $Q = \{|x|\leq 1,\ |y|\leq 1,\ |z|\leq 1\}$ è un dominio regolare a tratti. LA SUA FRONTIERA $S = \partial Q$ è regolare a tratti e la posso orientare $(S, \hat{\nu})$ dove $\hat{\nu}$ è definita nelle facce "aperte" in modo uscente da Q



<u>CONTROESEMPIO</u> : Il NASTRO DI MOEBIUS



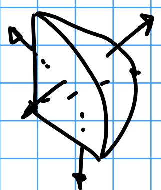
SI VEDE CHE S "ha un solo faccia" e NON AMMETTE UN CAMPO DI VETTORI CONTINUO – $\Sigma(S)$ è descritto da UNA SOLA CURVA
$$\Sigma^*(S) = \Sigma(S)$$

MA NON TROVO $\hat{\nu}$ t.c. $(S, \hat{\nu})$ sia orientata

FATTO Se $\bar\Omega$ è un dominio regolare a tratti ∂S è una sup orientabile e $\Sigma(\partial S)=\emptyset$

ALTRO ESEMPIO $\partial\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0\ \ y\ge 0\ \ z\ge 0\} = S$

$$= S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$$



DEF. Se $(S,\hat\nu)$ è una superficie orientabile e $\vec f: S\to\mathbb{R}^3$ $\|\vec f\|$ integrabile su S, posso definire il flusso di $\vec f$ attraverso $(S,\hat\nu)$

$$\Phi(\vec f, S, \hat\nu) = \sum_{i=1}\Phi(\vec f, S_i, \hat\nu) \qquad \text{dove}$$

S_i è una decomposizione di S tale che valgono le proprietà sopra

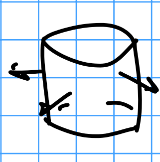
$\simeq (S,\hat\nu)=(S_1,\hat\nu_1)\cup\dots\cup(S_n,\hat\nu_n)$

in cui versi che si cancellano

ESEMPIO $S=\{x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$ $\quad \vec f(x,y,z)=x\vec i+y\vec j+z\vec k$

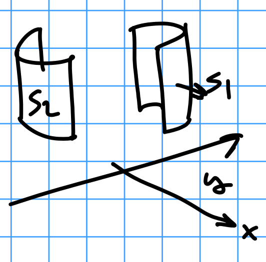
= superficie laterale del cilindro

$\hat\nu$ uscente da $\{x^2+y^2\le 1\ 0\le z\le 1\}$ $\quad \hat\nu(x,y,z)=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$



($S\ne\partial$ CILINDRO MA $S\subset\partial$ CILINDRO)

$\Phi(\vec f, S, \hat\nu) = ?!$ Per applicare la def. devo scomporre S in superfici parametriche.



$S_1=\{x^2+y^2=1\ \ 0\le z\le 1,\ y\ge 0\}$

$S_2=\{x^2+y^2=1\ \ 0\le z\le 1,\ y\le 0\}$

S_1 è parametrica a questo trovo la parametrizzazione

$$\boxed{\Gamma_1(u,v) = \left(u, \sqrt{1-u^2}, v\right)} \qquad -1\le u\le 1 \qquad 0\le v\le 1$$

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\\ 0\end{pmatrix} \qquad \frac{\Gamma_1}{\partial v} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec N_{\Gamma_1}(u,v) = \det\begin{bmatrix} i & 1 & 0\\ j & -u/\sqrt{1-u^2} & 0 \\ k & 0 & 1\end{bmatrix} = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\vec i - \vec j + 0\cdot\vec k = \begin{pmatrix}\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

NON È USCENTE DAL CILINDRO

DEVO INVERTIRE LA NORMALE → POSSO USARE

$$\Gamma_1(u,v) = \left(v, \sqrt{1-v^2}, u\right) \;\dots\dots \qquad \vec N(u,v) = \begin{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

oppure usare la Γ_1 precedente e invertire il segno del risultato

USO LA PRIMA PARAMETRIZZAZIONE Γ_1 (allora devo invertire il segno)

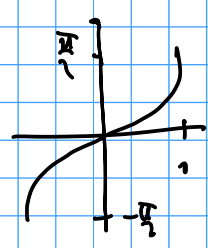
$$\iint_{S_1} \vec f\cdot\hat\nu\, d\sigma = -\iint_{\substack{-1\le u\le 1\\ 0\le v\le 1}} \vec f\left(u,\sqrt{1-u^2},v\right)\cdot\left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\vec i - \vec j\right)du\,dv$$

$$\left(= \iint_{\substack{-1\le v\le 1\\ 0\le u\le 1}} \vec f\left(v,\sqrt{1-v^2},u\right)\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\vec i + \vec j\right)du\,dv\right)$$

$$= \iint_{\substack{-1\le u\le 1\\ 0\le v\le 1}} \left(\underbrace{f_1\left(u,\sqrt{1-u^2},v\right)}_{u}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + \underbrace{f_2\left(u,\sqrt{1-u^2},v\right)}_{\sqrt{1-u^2}}\right)du\,dv =$$

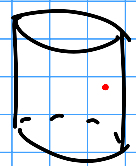
$$\iint_{\substack{-1\le u\le 1\\ 0\le v\le 1}} \left(\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} + \sqrt{1-u^2}\right)du\,dv = \int_0^1 dv \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$\arcsin u\,\Big|_{-1}^{1} = \pi$$



$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec f\cdot\hat\nu\, d\sigma = \pi \qquad \text{STESSI CALCOLI} \qquad \iint_{S_2} \vec f\cdot\hat\nu\, d\sigma = \pi$$

DUNQUE $\iint_S (x\vec i + y\vec j + z\vec k)\cdot\hat\nu \, d\sigma = 2\pi$



NOTA $(\underbrace{x\vec i + y\vec j}_{\hat\nu} + z\vec k)\cdot\hat\nu = \|\hat\nu\| = 1$

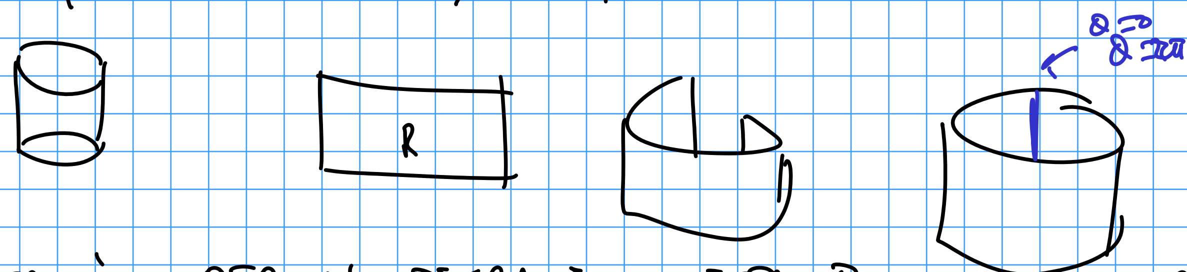
$$\Rightarrow \iint_S \vec f\cdot\hat\nu \, d\sigma = \iint_S d\sigma = 2\pi$$

POTREI ANCHE usare le coordinate cilindriche:

Uso la "parametrizzazione" $\Gamma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$

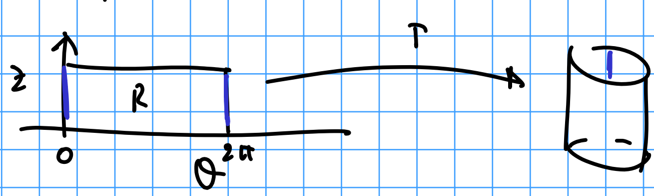
$0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le z \le 1$

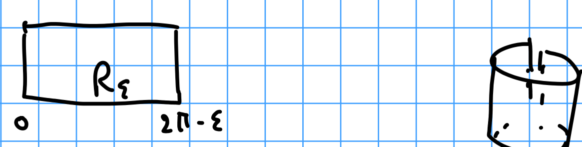
PURTROPPO Γ NON È INIETTIVA MA i "punti cattivi" sono quelli con $\theta = 0$ / $\theta = 2\pi$



IN REALTÀ PER L'INTEGRALE QUESTA Γ VA BENE perché i punti con $\theta = 0$ / $\theta = 2\pi$ sono TRASCURABILI IN

$R = \{0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le z \le 1\}$





$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N_\Gamma = \det\begin{bmatrix} \vec i & -\sin\theta & 0 \\ \vec j & \cos\theta & 0 \\ \vec k & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

N_Γ ENTRANTE − OK con 3.

$$\Phi(f, R_\varepsilon, \hat\nu) = \iint_{R_\varepsilon} \vec f(\underbrace{\cos\theta, \sin\theta, z}_{\Gamma(\theta,z)}) \cdot N_\Gamma(\theta, z) \, d\theta \, dz =$$

$$\iint_{R_\varepsilon} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \, dz = \underbrace{\iint_{R_\varepsilon} 1 \, d\theta \, dz}_{2\pi - \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \iint_R 1 \, d\theta \, dz = 2\pi$$

QUINDI SE VOGLIO CALCOLARE IL FLUSSO di un campo $\vec{f}$ sul bordo del cilindro S (con $\hat{\nu}$ uscente dal cilindro) posso fare

$$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\\ 0\le z\le h}} \vec{f}(\cos\theta,\sin\theta,z)\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix} d\theta\, dz$$

ANALOGAMENTE SE $S=$ sfera $\{x^2+y^2+z^2=R^2\}$ e $\hat{\nu}$ è $\hat{\nu}(P)=\dfrac{\vec{P}}{\|P\|}$

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi}} \vec{f}(\Gamma(\varphi,\theta))\cdot N_\Gamma(\varphi,\theta)\,d\theta\,d\varphi$$

dove $\Gamma(\varphi,\theta)=R\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \Rightarrow N_\Gamma(\varphi,\theta)=\sin\varphi\;\Gamma(\varphi,\theta)$

(anche se Γ NON è INIETTIVA) #