Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 57 22/04/2020

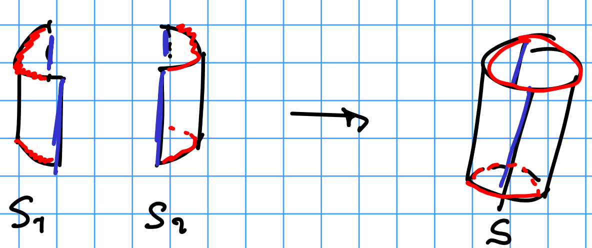
(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

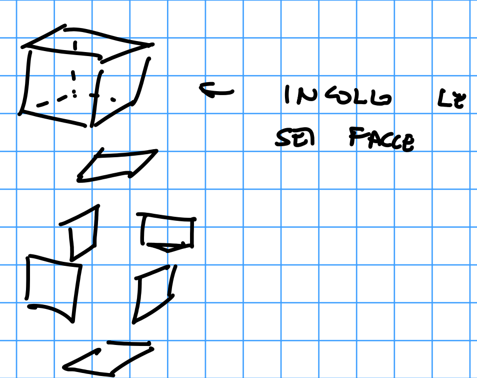
Def. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$. Diciamo che S è una superficie regolare a tratti se esistono $S_1 \dots S_m$ superfici parametrizzate tali che

(a) $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$

(b) Se $i \neq j \in \{1 \dots m\}$ allora $S_i \cap S_j \subset \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j)$

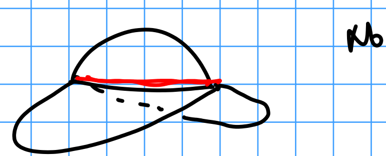
(c) I punti x tali che esistono i, j, k diversi tra loro con $x \in S_i \cap S_j \cap S_k$ sono in numero finito





(b)

(c)



Se $S_1 \dots S_n$ sono come sopra diciamo che sono una

DECOMPOSIZIONE PER S

LEMMA Se $S \subset \mathbb{R}^3$ e $S_1 \dots S_n$ e $S'_1 \dots S'_m$

siano due decomposizione di S

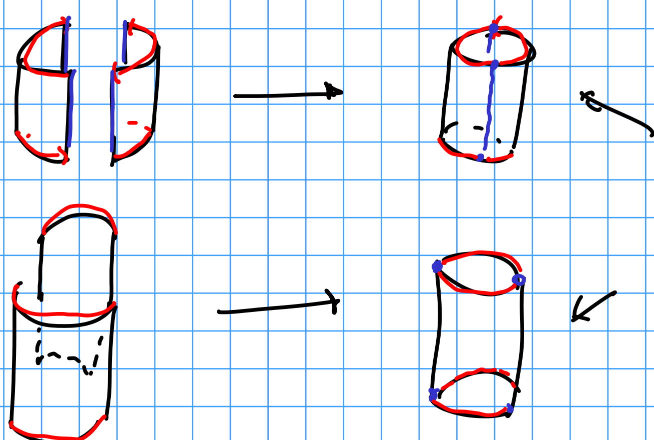
(a) Se poniamo

$$\Sigma_i = \Sigma(S_i) \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} S_j \right)$$

Σ_i = bordo di S_i che non viene incollato

$$\Sigma'_{i'} = \Sigma(S'_{i'}) \setminus \left(\bigcup_{j' \neq i'} S'_{j'} \right)$$

ALLORA $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{m} \Sigma'_{i'}}$

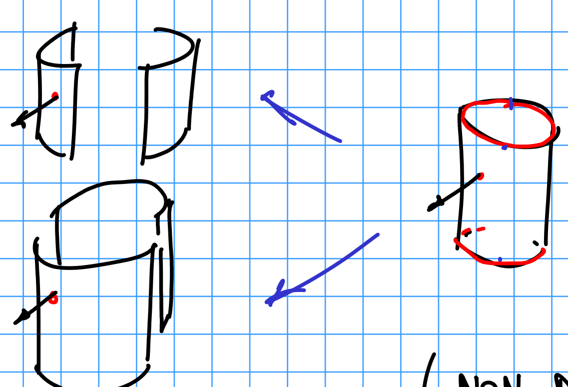


le chiusure delle curve in rosso coincidono

(b) Se $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$ $\quad P \in S'_{i'} \setminus \Sigma(S'_{i'})$

$$\Rightarrow \quad T_p(S_i) = T_p(S'_{i'})$$

S = cilindro



(NON DIMOSTRO QUESTO LEMMA)

Def. $S \subset \mathbb{R}^3$ è regolare a tratti definisco il <u>bordo di S</u>

$$\Sigma(S) = \overline{\bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i} \qquad \text{dove } \Sigma_i = \Sigma(S_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} S_j$$

e $S_1 \dots S_m$ è una decomposizione di S

LA DEF. HA SENSO PER LA (a) del lemma

Inoltre dico che un punto $P \in S$ è <u>regolare</u> se esiste una decomposizione $S_1 \dots S_m$ tale che $P \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$ per un i da $1 \dots n$. Se P è regolare sono definiti

$$T_P(S) =: T_P(S_i)$$
$$N_P(S) =: N_P(S_i)$$

PER LA (b) del lemma $T_P(S)$ che $N_P(S)$ sono ben definiti

- Chiamiamo punti singolari i punti $P \in S$ che non sono Regolari. Indico

$$\Sigma^*(S) = \{\text{punti singolari di } S\}$$

(i punti singolari sono sempre sul bordo di qualche S_i — per ogni decomposizione $S_1 \dots S_m$)

Su $\Sigma^*(S)$ non è definito il piano tangente / la retta normale

---

- IN OGNI CASO $\Sigma(S) \subset \Sigma^*(S)$
- PUÒ SUCCEDERE CHE $\Sigma^*(S) = \emptyset$
- Nel caso del cilindro $\Sigma^*(S) = \Sigma(S)$

TUTTI I PUNTI DI $S \setminus \Sigma(S)$ sono regolari

<u>ESEMPIO</u> $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

S è una sup regolare a tratti perché

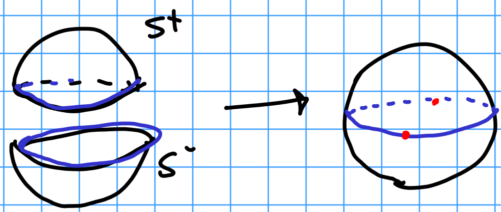
$S = S^+ \cup S^-$

$S^+ = \{x^2+y^2+z^2=1 \quad z \geq 0\}$

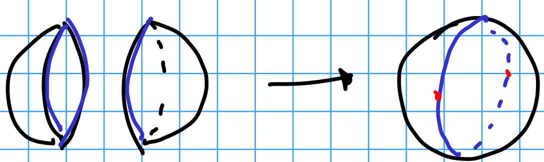
$S^- = \{x^2+y^2+z^2=1 \quad z \leq 0\}$

$\Sigma(S^+) = \Sigma(S^-) = \{(x,y,0) : x^2+y^2=1\}$

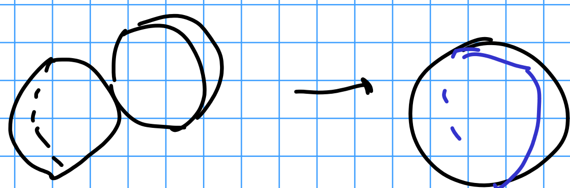
$S^+ \cap S^- = \Sigma(S^+) = \Sigma(S^-)$



tutti i punti tranne al più l'equatore sono regolari $(z \neq 0)$



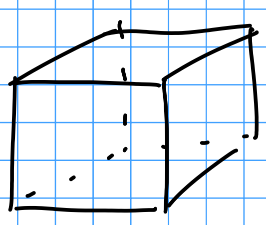
tutti i punti con $y \neq 0$ sono regolari



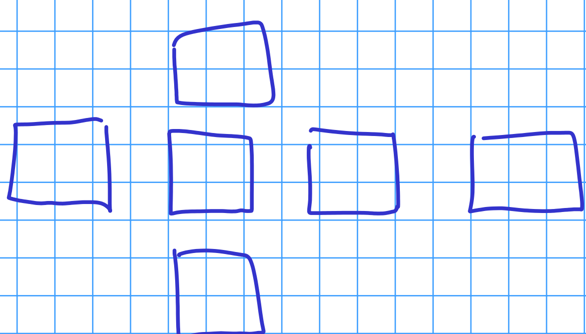
TUTTI I PUNTI DI S SONO REGOLARI

$\Sigma(S) = \emptyset$ $\qquad \Sigma^*(S) = \emptyset$

ESEMPIO $\boxed{S = \partial Q}$ $\qquad Q = \{(x,y,z) \quad |x| \leq 1 \quad |y| \leq 1 \quad |z| \leq 1\}$



← INCOLLO LE SEI FACCE



$\Sigma(S) = \emptyset$

$\Sigma^*(S) = \{12 \text{ LATI DI } S\}$

FUORI DA $\Sigma^*(S)$ è definito la normale a S (e il piano tangente)

- Lo sfera è regolare
- Il cilindro è regolare
- La superficie del cubo è regolare a tratti NON regolare

(S regolare se $\Sigma^*(S) = \Sigma(S)$)

TEOREMA Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $\overline{\Omega}$ è regolare a tratti

$\Rightarrow$ $S = \partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ è una superficie regolare a tratti. Se inoltre $\overline{\Omega} = \{ P \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } G_1(P) \leq 0 \dots G_n(P) \leq 0 \}$
dove $G_1 \dots G_m$ verificano le solite ipotesi:

- $\nabla G_i(P) \neq \vec{0}$ se $G_i(P) = 0$
- se $G_i(P) = G_j(P) = 0$ $i \neq j$ $\Rightarrow$ $\nabla G_i(P)$ e $\nabla G_j(P)$ lin. indip

Allora $\Sigma(S) = \emptyset$ mentre
$$\Sigma^*(S) = \{ P : \exists\, i, j \;\; i \neq j \;\; G_i(P) = G_j(P) \}$$

NOTA $S = \{ P : \exists\, i \text{ con } G_i(P) = 0 \} = \bigcup_{i=1}^{m} \{ G_i = 0 \}$

nel caso $S = \partial Q$ ho proprio questa situazione!

$$Q = \{ -1 \leq x \leq 1, \; -1 \leq y \leq 1, \; -1 \leq z \leq 1 \}$$

ho 6 funzioni di vincolo $Q = \{ G_1 \leq 0 \dots G_6 \leq 0 \}$

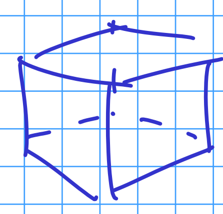
$G_1(x,y,z) = -1 - x \qquad G_2(x,y,z) = x - 1$

$G_3(x,y,z) = -1 - y \qquad G_4(x,y,z) = y - 1$

$G_5 = -1 - z \qquad G_6 = z - 1$

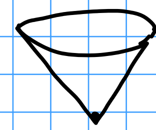
$S = \partial Q = \{ G_1 = 0 \} \cup \{ G_2 = 0 \} \dots \cup \{ G_6 = 0 \}$

Le SEI FACCE



$\Sigma^*(\partial Q)$ = i 12 lati ottenuti ponendo $\{ G_i = 0, G_j = 0 \}$ $i \neq j \in \{1 \dots 6\}$

ESEMPIO (CONO)



$$S = \{ z^2 = x^2 + y^2 \quad 0 \le z \le 1 \}$$

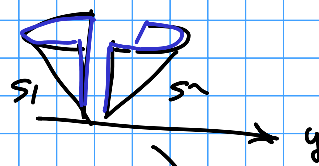
S è grafico di $z = \sqrt{x^2+y^2}$ su $\{x^2+y^2 \le 1\}$

Però S non è una sup. param. perché $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ non è C^1 in $\{x^2+y^2 < 1\}$

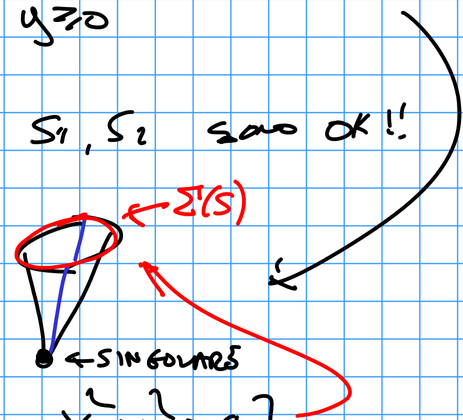
Però è una sup. regolare a tratti

$$S_1 = \{ z^2 = x^2 + y^2 \quad 0 \le z \le 1, \ y \le 0 \}$$

$$S_2 = \{ z^2 = x^2 + y^2 \quad 0 \le z \le 1, \ y \ge 0 \}$$



il punto $(0,0,0) \in \Sigma'(S_1)$, $\Sigma'(S_2)$ $\qquad$ S_1, S_2 sono OK!!



Si ha $\Sigma(S) = \{ (x, y, 1) \quad x^2+y^2 = 1 \}$

$$\Sigma^{v}(S) = \Sigma'(S) \cup \{(0,0,0)\}$$

#