Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 56 21/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Def. (versione alternativa di superficie parametrica)

- Se $\boxed{S \subset \mathbb{R}^3}$ dico che S è una SUPERFICIE PARAMETRICA se esistono $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare e $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 verificante (a) e (b) di ieri (Γ è una sup. par. nel senso detto ieri) TALE CHE $S = \Gamma(D)$

  Se Γ ha queste proprietà dico che Γ è una PARAMETRIZZAZIONE per S.

- Se S è una sup. parametrica posso definire:

(a) $\Sigma(S) := \Sigma(\Gamma)$ dove Γ è una qualunque parametrizzazione

(b) $\forall\ P_0 \in S \setminus \Sigma(S)$ posso definire

$T_S(P_0)$ (PIANO TANGENTE)

$:= T_\Gamma(u_0, v_0)$ dove Γ è una param. e $P_0 = \Gamma(u_0, v_0)$

$N_S(P_0)$ (RETTA NORMALE A S in P_0)

$:= \{ \lambda \vec{N}_\Gamma(u_0, v_0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$

(non è invece possibile definire in modo "canonico" vettore normale nei punti di $S \setminus \Sigma(S)$)

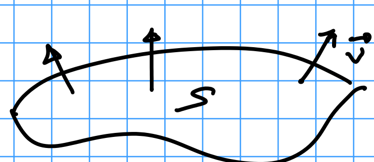
QUESTE DEFINIZIONI SONO BEN POSTE PERCHÉ se CAMBIO PARAMETRIZZAZIONE OTTENGO GLI STESSI OGGETTI (TEOREMA DI IERI - NO DIM.)

DEF. Chiamo superficie (PARAMETRICA) orientata in $\mathbb{R}^3$ una superficie parametrica S, dotata di un campo di vettori normali $\vec{\nu}$ non nulli. RIGOROSAMENTE

Una sup. parametrica orientata è una coppia

$$(S, \vec{\nu}) \quad \text{dove}$$

- S è una superficie parametrica
- $\vec{\nu} : S \setminus \Sigma(S) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\nu}$ continua, $\|\vec{\nu}\| \neq \vec{0}$
  e $\forall P_0 \in S \setminus \Sigma(S)$, $\vec{\nu}(P_0) \in N_S(P_0)$



FATTO Sia S una sup. parametrica.

(1) È sempre possibile trovare un campo $\vec{\nu} : S \to \mathbb{R}^3$ tale che $(S, \vec{\nu})$ sia orientata. Posso poi supporre che $\|\vec{\nu}\| = 1$ (di solito quando $\vec{\nu}$ ha norma 1 lo indico con $\hat{\nu}$).

IN EFFETTI SE S è una sup. par. $\Rightarrow \exists$ Γ parametrizzazione e allora posso definire

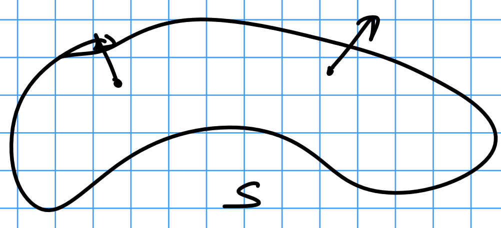
$$\vec{\nu}(P_0) = \vec{N}_\Gamma(u_0, v_0) \quad (\neq \vec{0}) \quad \text{dove } P_0 = \Gamma(u_0, v_0)$$

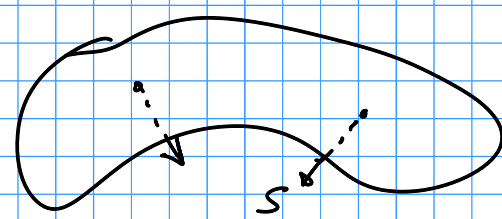
(oppure $\hat{\nu}(P_0) = \dfrac{\vec{N}_\Gamma(u_0,v_0)}{\|\vec{N}_\Gamma(u_0,v_0)\|}$)

② Se chiedo che $\|\vec{\nu}\| = 1$ allora ci sono solo due possibilità di scegliere $\vec{\nu} \, (= \hat{\nu})$

Se $(S, \hat{\nu})$ è orientato anche $(S, -\hat{\nu})$ è orientato e non ci sono altri campi normali unitari.

CI SONO SOLO DUE POSSIBILI VERSI DELLA NORMALE

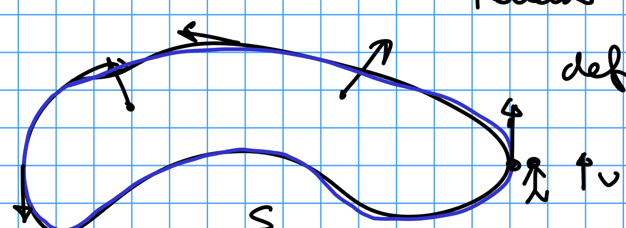




$\longleftrightarrow$ Le parametrizzazioni Γ per S si dividono in due classi a seconda del verso di $\vec{N}_\Gamma$

③ Dato $(S, \hat{\nu})$ orientato è automaticamente definito il "VERSO DEL BORDO" cioè posso descrivere $\Sigma(S)$ mediante una unione finita di curve chiuse con $\underbrace{\text{"verso coerente con } \hat{\nu}\text{"}}_{⊛}$ $\tilde{\gamma}_1 \dots \tilde{\gamma}_k$,

⊛ (INTUITIVAMENTE) Ogni $\tilde{\gamma}_i$ $(i = 1..k)$ percorre $\Sigma(S)$ tenendo S a sinistra se $\hat{\nu}$ definisce "il sopra"

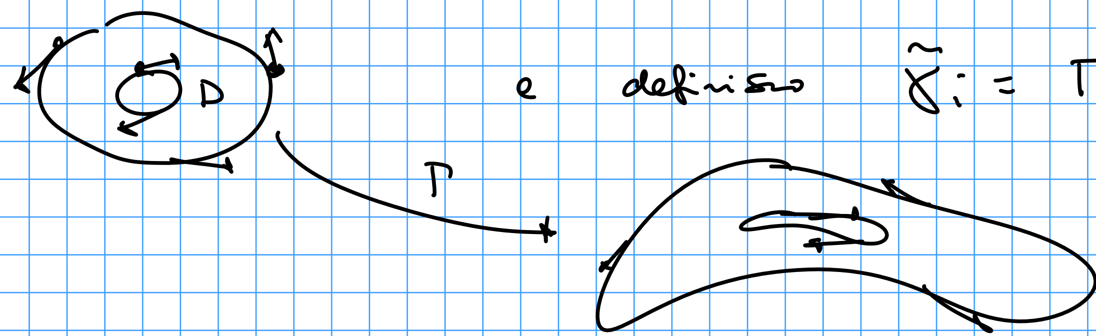


Se inverto la normale $\hat{\nu}$ (passo a $(S, -\hat{\nu})$) il verso su $\Sigma(S)$ si inverte

Se voglio una definizione rigorosa devo fare così:

Dato $(S, \hat{\nu})$ prendo una parametrizzazione $\Gamma: D \to \mathbb{R}^3$ tale che $\Gamma(D) = S$ e $\dfrac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|} = \hat{\nu}(\Gamma(u,v))$
$\forall (u,v) \in D$

Prendo le curve γ_i che descrivono ∂D NEL MODO CANONICO



e definisco $\tilde{\gamma}_i = \Gamma \circ \gamma_i$

DEFINITA $\hat{\nu}$ $\longleftrightarrow$ DEFINITO il verso di $\Sigma(S)$

ESEMPIO . Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1 , \ z \geq 0\}$

S è una sup. parametrica perché (come abbiamo visto) è possibile trovare una parametrizzazione

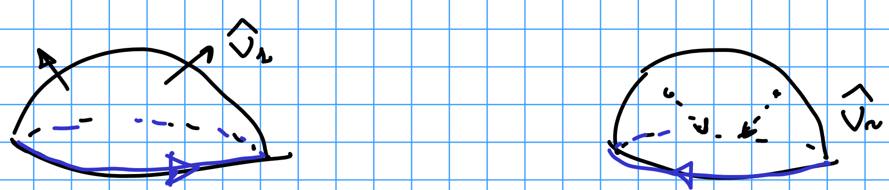
$\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ $\qquad D = \{u^2+v^2 \leq 1\}$

$\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

- A partire da S posso considerare due sup. par. orientate e cioè

$(S, \hat{\nu}_1)$ e $(S, \hat{\nu}_2)$

dove $\hat{\nu}_1(P) = \vec{P}$ e $\hat{\nu}_2(P) = -\vec{P}$



- IN ENTRAMBI I CASI $\Sigma(S) = \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}$
- Nel primo caso assegno il verso su $\Sigma(S)$ coerente con $\hat{\nu}_1$ prendendo

$\tilde{\gamma}_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$

. Nel secondo caso $\tilde{\gamma}_2(t) = (\cos(t), -\sin(t), 0)$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

Suppongo $S \subset \mathbb{R}^3$ sia una superficie parametrica

Def. (integrale superficiale di prima specie)

- Sia $f : S \to [-\infty, +\infty]$. Dico che f è misurabile su S se esiste una parametrizzazione $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ $(\Gamma(D) = S)$ tale che $(u,v) \mapsto f(\Gamma(u,v)) \cdot \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|$ è misurabile su $\mathring{D}$ (o su D convenendo $\|N_\Gamma\| = +\infty$ su ∂D)
- Se f è misurabile, $f \geq 0$ $(f : S \to [0, +\infty])$ definisco

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_{\mathring{D}} f(\Gamma(u,v)) \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

(ha senso perché l'integrando è misurabile e positivo). Può fare $+\infty$

- Se f è misurabile su S dico che f è integrabile su S se $\iint_S f^+ d\sigma < +\infty$ e $\iint_S f^- d\sigma < +\infty$

($f^+ =$ parte positiva $= \max(f, 0)$, $f^- =$ parte negativa $= \max(-f, 0)$
$\Rightarrow f = f^+ - f^-$ $\quad |f| = f^+ + f^-$)

Se f è integrabile su S pongo

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_S f^+ d\sigma - \iint_S f^- d\sigma \left(= \iint_{\mathring{D}} f(\Gamma(u,v)) \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv \right)$$

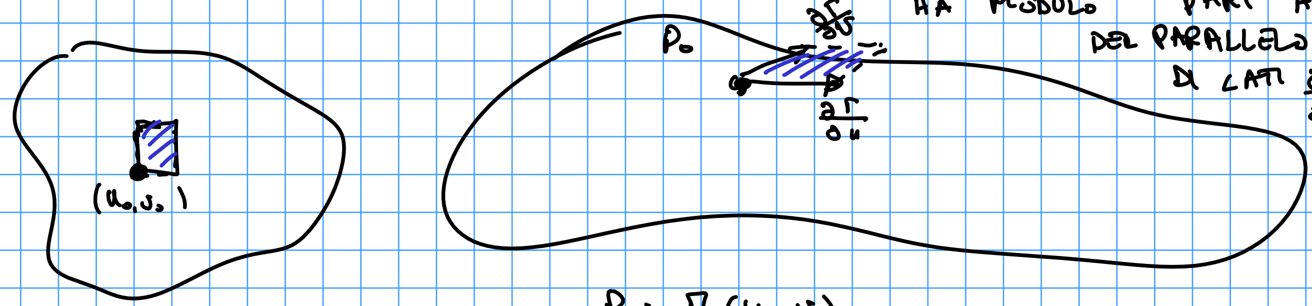
IN PARTICOLARE CHIAMO AREA DI S

$$A(S) := \iint_S d\sigma = \iint_D \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|\, du\, dv$$

Noto

$$N_\Gamma(u,v) = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$$ ← HA DIREZIONE $\perp$ a $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}$

HA MODULO PARI ALL'AREA DEL PARALLELOGRAMMA DI LATI $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}$



$P_0 := \Gamma(u_0, v_0)$

QUESTE DEFINIZIONI NON DIPENDONO da Γ (ma solo da S)

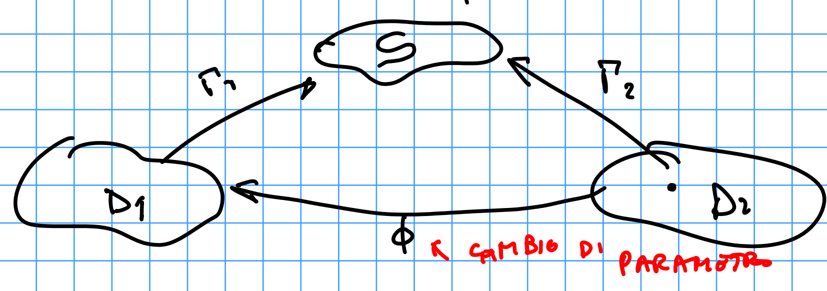
TEOR. (INDIPENDENZA DALLA PARAMETRIZZAZIONE)

Se Γ_1 e Γ_2 sono due parametrizzazioni per S

$$\Rightarrow \iint_{D_1} f \circ \Gamma_1 \, \|\vec{N}_{\Gamma_1}\| \, du_1 dv_1 = \iint_{D_2} f \circ \Gamma_2 \, \|\vec{N}_{\Gamma_2}\| \, du_2 dv_2$$

DIM. Si può dimostrare che se Γ_1 e Γ_2 sono come sopra $\exists\ \phi : D_2 \to D_1$, ϕ continua, biiettiva e ϕ di classe C^1 su $\mathring{D}_2$ tale che

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \phi \quad (\Gamma_2(u_2, v_2) = \Gamma_1(\phi(u_2, v_2)))$$



NON LO DIMOSTRO (È LA BASE PER DIMOSTRARE L'INVARIANZA DI $\Sigma(S)$, $J(S)$ e $N(S)$ rispetto alla parametrizzazione

Se so che esiste questo ϕ allora posso dimostrare la tesi

$$\iint_{\overset{\circ}{D}_2} f(\Gamma_2(u_2,v_2)) \, \|\vec{N}_{\Gamma_2}(u_2,v_2)\| \, du_2 \, dv_2 =$$

$$\iint_{\overset{\circ}{D}_2} f(\Gamma_1(\phi(u_2,v_2))) \, \|\vec{N}_{\Gamma_2}(u_2,v_2)\| \, du_2 \, dv_2 = (*)$$

Però $\vec{N}_{\Gamma_2}(u_2,v_2) = \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial u_2} \otimes \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial v_2} =$

$$\frac{\partial(\Gamma_1 \circ \phi)}{\partial u_2} \otimes \frac{\partial(\Gamma_1 \circ \phi)}{\partial v_2} = \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \circ \phi\right) \otimes \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} \circ \phi\right)}_{\vec{N}_{\Gamma_1} \circ \phi} \cdot \det J_\phi$$

LO VEDIAMO SOTTO

Se la formula sopra è vera $\Rightarrow$

$$(*) \iint_{D_2} f(\Gamma_1(\phi(u_2,v_2))) \, \|\vec{N}_{\Gamma_1}(\phi(u_2,v_2))\| \, |\det J_\phi(u_2,v_2)| \, du_2 \, dv_2$$

$= $ (cambio di variabile $(u_1,v_1) = \phi(u_2,v_2)$)

$$= \iint_{D_1} f(\Gamma_1(u_1,v_1)) \, \|\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1)\| \, du_1 \, dv_1 .$$

HO DIMOSTRATO LA TESI

VERIFICHIAMO IL PASSAGGIO IN ROSSO

Partiamo dalla formula di differenziale della composizione

$$\underset{\underset{\left[\frac{\partial \Gamma_2}{\partial u_2}, \frac{\partial \Gamma_2}{\partial v_2}\right]}{\shortparallel}}{J_{\Gamma_2}} = J_{\Gamma_1 \circ \phi} = (J_{\Gamma_1} \circ \phi) \, J_\phi = \left[\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \circ \phi, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} \circ \phi\right] \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{J_\phi} =$$

(matrice 3×2)

$$\left[a \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \circ \phi + c \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} , \quad b \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} + d \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{N}_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u_2} \otimes \frac{\partial \Gamma_2}{\partial v_2} =$$

$$\left(a\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1}\circ\phi + c\,\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}\right) \otimes \left(b\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} + d\,\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}\right) = a\,d \overbrace{\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1}\circ\phi \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}\circ\phi\right)}^{\vec{N}_{\Gamma_1}\circ\phi} \; ..$$

$$+\,c\,b\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1}\right)\circ\phi = \underbrace{(a\,d - b\,c)}_{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} = \det J_\phi} \vec{N}_{\Gamma_1} \circ \phi$$

#

ESEMPIO Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $g: D \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(D)$)
Allora, come già visto,

$$S = Gr(g) = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = g(x,y)\}$$

è una superficie parametrica; una parametrizzazione è'

$$\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v)) \qquad \text{ecc}$$

Come già visto $\vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial u} \\ -\frac{\partial g}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}$

Allora $\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + |\nabla g|^2}$

$$\Rightarrow \quad A\left(Gr(g)\right) = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, du\, dv$$

<u>Esempio concreto</u>: Lo calotta $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1 \ \ z \geq 0\}$ è grafico di $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ su $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\nabla g(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\begin{pmatrix} -2x \\ -2y\end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (x,y) \in \mathring{D}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint_{\{x^2+y^2<1\}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy =$$

$$\iint_{\{x^2+y^2<1\}} \sqrt{\frac{1 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2}}{1-x^2-y^2}}\, dx dy = \iint_{\{x^2+y^2<1\}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

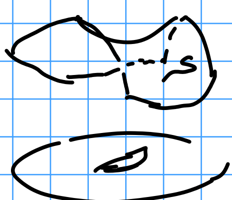
$\to$ (coordinate polari)
$$\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho<1}} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho =$$

$\begin{pmatrix} s=\rho^2 \\ ds = 2\rho d\rho \end{pmatrix}$
$$2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{ds}{\sqrt{1-s}} = 2\pi \Big[-\sqrt{1-s} \Big]_0^1 = \boxed{2\pi}$$

Effettivamente 2π = Area di mezza sfera.

<u>Altro esempio</u> $\quad D = \{x^2+y^2 \le 1\} \qquad g(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \qquad S = \text{grafico di } g \text{ (su } D)$$



$$A(S) = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy \quad \text{(coord. polari)}$$

$$= \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1}} \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^4 \sqrt{1+s}\, ds =$$

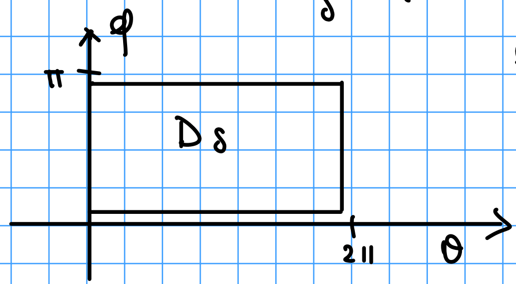
$$\left(4\rho^2 = s \qquad 8\rho\, d\rho = ds \right)$$

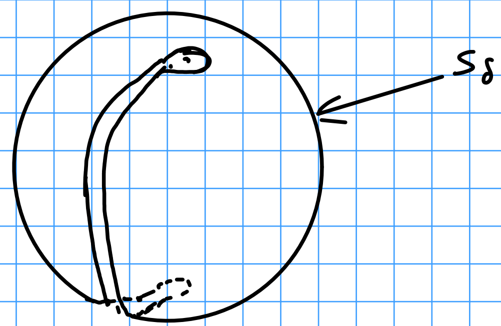
$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} (1+s)^{3/2} \right]_0^4 = \frac{\pi}{6} \left(2^{3/2} - 1 \right) = \frac{\pi}{6} \left(2\sqrt{2} - 1 \right)$$

<u>Ancora un esempio</u> $\quad$ Torniamo alle coordinate sferiche cioè a

$$\Gamma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

Non è una buona parametrizzazione su $\{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$ (perché non è iniettiva). Però se prendo $\delta > 0$ e considero $D_\delta = \{ 0 \le \theta \le 2\pi - \delta ,\ \delta \le \varphi \le \pi - \delta \}$. Su D_δ la Γ è una buona parametrizzazione per la superficie $S_\delta = \Gamma(D_\delta)$





(se $\delta \to 0$ ritrovo la sfera..)

Area di S_δ ?? Avevamo già calcolato

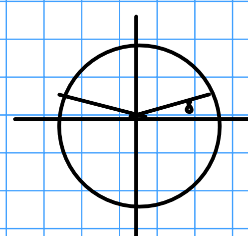
$$\vec{N}_\Gamma(\theta, \varphi) = -\sin\varphi\, \Gamma(\theta,\varphi) \Rightarrow$$

$$\|\vec{N}_\Gamma(\theta,\varphi)\| = |\sin\varphi|\, \underbrace{\|\Gamma(\theta,\varphi)\|}_{=1} = \sin\varphi$$

$$\Rightarrow A(S_\delta) = \int_0^{2\pi-\delta} d\theta \int_\delta^{\pi-\delta} \sin\varphi\, d\varphi = (2\pi-\delta)\Big[-\cos\varphi\Big]_\delta^{\pi-\delta} =$$

$$(2\pi-\delta)\big(\cos(\delta) - \cos(\pi-\delta)\big) =$$

$$2(2\pi-\delta)\cos(\delta) \leftarrow \text{Area di } S_\delta$$



e se $\delta \to 0$ ottengo $\boxed{A(\text{sfera}) = 2\cdot 2\pi = 4\pi}$

<u>DUNQUE</u> $$A(\text{sfera}) = \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi}} \|\vec{N}_\Gamma(\theta,\varphi)\|\, d\theta\, d\varphi$$

anche se Γ non è una buona parametrizzazione per la sfera.

Quando si fa l'area in effetti basta che Γ sia iniettiva eccetto che su un insieme di misura nulla (NO DIM)

Def. Se $(S, \hat{\nu})$ è una superficie parametrica orientata e se $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^3$ è integrabile su S

(f_1, f_2, f_3 sono integrabili su S)

Definiamo il FLUSSO di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$

come

$$\boxed{\iint_D \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v)\, du\, dv = \Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})}$$

dove $\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di S tale che

$\vec{N}_\Gamma(u,v)$ è concorde con $\hat{\nu}(\Gamma(u,v))$

Di fatto si ha che:

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S (\vec{f} \cdot \hat{\nu})\, d\sigma$$

INFATTI $\iint_S (\vec{f} \cdot \hat{\nu})\, d\sigma =$ scelgo Γ come detto sopra

$$\iint_D (\vec{f} \cdot \hat{\nu})(\Gamma(u,v))\, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|\, du\, dv =$$

$$\iint_D \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \underbrace{\hat{\nu}(\Gamma(u,v))\, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|}_{\vec{N}_\Gamma(u,v)}\, du\, dv$$

per la scelta di Γ
$\vec{N}_\Gamma(u,v) = \hat{\nu}\, \|\quad\|$

$$= \iint_D \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v)\, du\, dv$$

Dunque il flusso di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$ è l'integrale su S della componente di $\vec{f}$ lungo $\hat{\nu}$

#