Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 55 20/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

SUPERFICI

Superficie Parametrica

Def. $D \subset \mathbb{R}$ un dominio regolare e tutti (*) LIMITATO ($\Rightarrow D$ chiuso)

$\Gamma : D \to \mathbb{R}^3$ una funzione continua tale che Γ è $C^1(\mathring{D})$ t.c.

(a) Γ è iniettiva

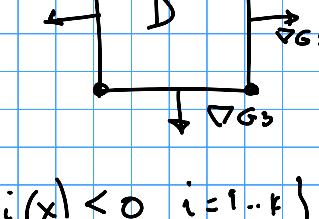
(b) $\forall (u_0, v_0) \in \mathring{D}$ i vettori $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0,v_0)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0,v_0)$ sono linearmente indipendenti

---

(*) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G_1(x,y) \leq 0,\ G_2(x,y) \leq 0, \dots, G_k(x,y) \leq 0\}$

e tutte le G_i sono C^1, $\nabla G_i(x,y) \neq 0$ se $G_i(x,y) = 0$.

Se $G_i(x,y) = G_j(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla G_i(x,y)$ e $\nabla G_j(x,y)$ lin. indip.



$D = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

$G_1 = -x$ $\quad G_2 = x-1$ $\quad G_3 = -y$ $\quad G_4 = y-1$

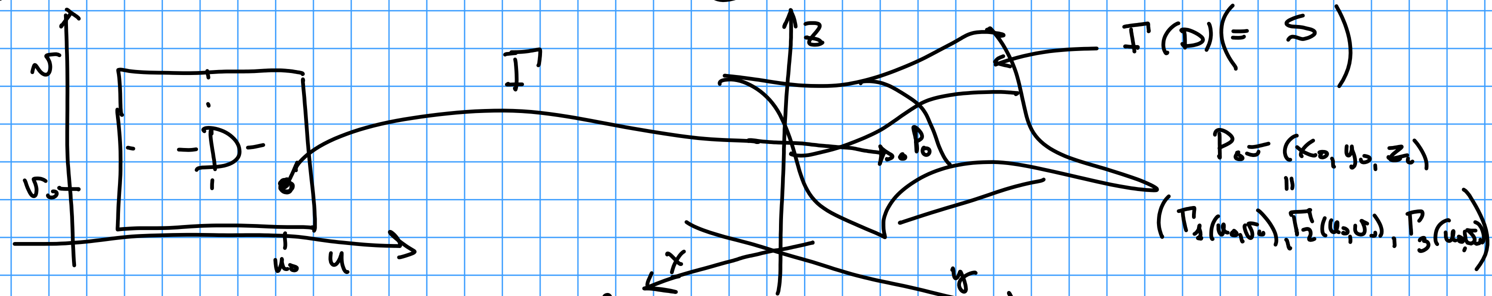
$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathring{D} = \{G_i(x) < 0,\ i = 1..k\}$

$\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \{G_i = 0\}$

In questa situazione dico che Γ è una superficie parametrica

(simile alla def. di curva regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \quad \gamma'(t) \neq 0$)



· L'immagine $\Gamma(D) \subset \mathbb{R}^3$ viene detta SOSTEGNO di Γ

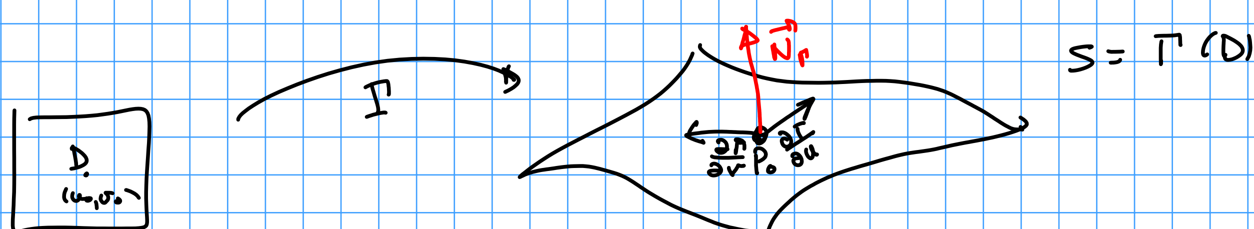
(IDEA $S := \Gamma(D)$ è una deformazione di D)

OSSERVIAMO CHE L'IPOTESI (b) si può esprimere dicendo che

$$\vec{N}_\Gamma(u_0,v_0) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0,v_0) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0,v_0) \neq 0 \quad \leftarrow \text{NORMALE}$$

$$\forall (u_0,v_0) \in \mathring{D}$$

· Il vettore $\vec{N}_\Gamma(u_0,v_0)$ si chiama "normale" a $S = \Gamma(D)$ nel punto $P_0 = \Gamma(u_0,v_0)$ (relativa a Γ)



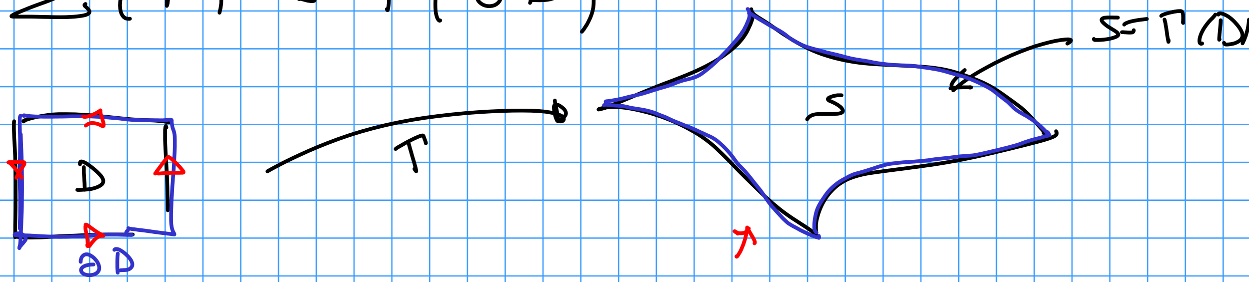
· Lo spazio (bidimensionale) generato dai due vettori $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0,v_0)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0,v_0)$ viene detto

PIANO TANGENTE a $S = \Gamma(D)$ in $P_0 = \Gamma(u_0,v_0)$ e lo indichiamo con $T_\Gamma(P_0)$

· È CHIARO che $\vec{N}_\Gamma(u_0,v_0)$ è perpendicolare a ogni $\vec{w} \in T_\Gamma(P_0)$ e quindi $T_\Gamma(P_0) \oplus \underbrace{\{\lambda N_\Gamma(P_0)\}}_{\text{retta normale}} = \mathbb{R}^3$

· Chiamiamo <u>BORDO</u> DELLA SUPERFICIE Γ l'insieme

$$\Sigma(\Gamma) = \Gamma(\partial D)$$



ATTENZIONE $\Sigma(\Gamma)$ NON È LA FRONTIERA di $\boxed{S = \Gamma(D)}$

$$\Sigma(\Gamma) \neq \partial\Gamma(D) = \partial S$$

IN EFFETTI $\partial S = S$ (nelle ipotesi fatte)

"S è sottile"

Se $P_0 \in S$

e $\rho > 0 \Rightarrow B(P_0, \rho)$ contiene punti che non sono in S

(e contiene $P_0 \in S$) $\Rightarrow P_0 \in \partial S$

· **OSS** S è chiuso (a più vedere)

OSS Posso sempre descrivere $\Sigma(S)$ come sostegno di un numero finito di curve regolari a tratti:

IN EFFETTI Dato che D è un dominio regolare LIMITATO - usando opportunamente il Dini - posso dire che

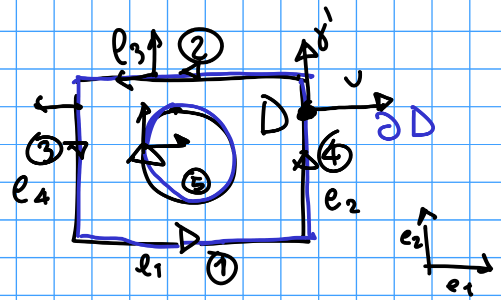
$$\exists\ \gamma_1 \dots \gamma_k \text{ curve in } \mathbb{R}^2 \text{ regolari a tratti chiuse } (\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2)$$

tali che $\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i[a_i, b_i]$ e tali che

$\boxed{\text{"ogni } \gamma_i \text{ tiene } D \text{ alla sinistra"}}$ ← HO INTRODOTTO UN VERSO CANONICO SU ∂D

(rigorosamente dovrei dire che $\nu(\gamma(t))$ (NORMALE A D in $\gamma(t)$) e $\gamma'(t)$ sono trasformati di $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ con un opp. lineare A tale che

$\det A > 0$)



HO DUE CURVE γ_1 e γ_2

γ_1 descrive ∂ QUADRATO $\quad \gamma_1 = l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4$

γ_2 descrive la circonferenza interna

lo posso scrivere

$D = \{-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, x^2+y^2 \geq 1\}$

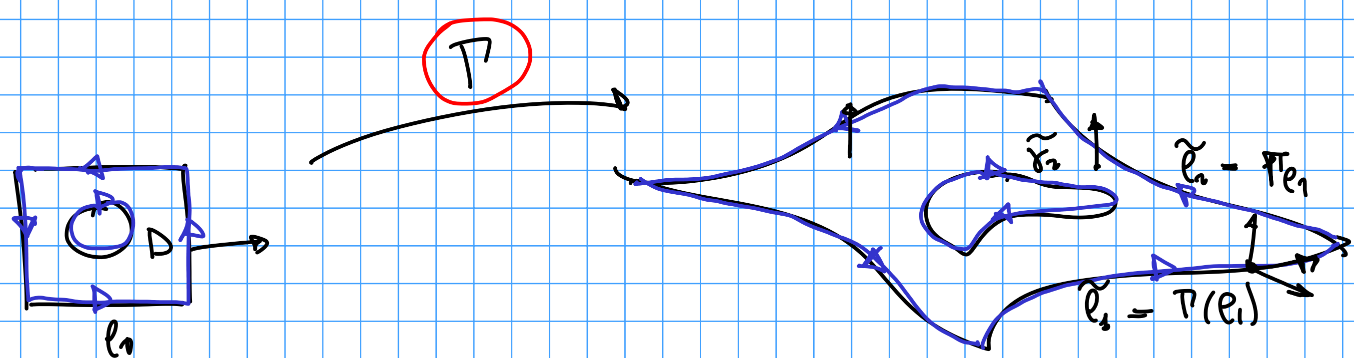
$\partial D = \underset{1}{\{(x,y) \in D \; x=-2\}} \cup \underset{2}{\{(x,y) \in D, x=2\}} \cup \underset{3}{\{(x,y) \in D \; y=-2\}} \cup \underset{4}{\{(x,y) \in D, y=2\}}$
$\cup \underset{5}{\{x^2+y^2=1\}}$

$l_1(t) = (t, -2) \quad -2 \leq t \leq 2 \qquad l_3(t) = (-t, 2) \quad -2 \leq t \leq 2$

$l_2(t) = (2, t) \quad -2 \leq t \leq 2 \qquad l_4(t) = (-2, -t) \quad -2 \leq t \leq 2$

$\gamma_1(t) = l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4$ è chiusa e regolare a tratti

$\gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ è chiusa e regolare



Date queste γ_i (che descrivono ∂D) posso costruire

$\tilde{\gamma}_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^3$ (anzi $\to S = \Gamma(D)$)

$\tilde{\gamma}_i(t) := \Gamma(\gamma_i(t))$

IN QUESTO MODO HO:

$$\Sigma(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\gamma}_i([a_i, b_i])$$

<u>OLTRE</u> a questo ho anche definito un <u>verso</u> su $\Sigma(\Gamma)$ (coerente con Γ - con $\vec{N}_\Gamma$)

IN D è NATURALE METTERE UN VERSO SU ∂D

IN $S = \Gamma(D) \subset \mathbb{R}$ il verso dipende da Γ

(potrei prendere un'altra Γ_1 con $S = \Gamma(D) = \Gamma_1(D)$ in cui le normali e il verso sono scambiati: basta per esempio prendere $\Gamma_1(u,v) = \Gamma(v,u)$

$D_1 = \{ (u,v) : (v,u) \in D \}$

<u>ESEMPIO</u> (CALOTTA SFERICA)

$$\Gamma(u,v) := \underline{(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})} \qquad D = \{ u^2+v^2 \leq 1 \}$$

Vediamo se valgono le ipotesi e cosa ci danno tutte le definizioni.

Γ è continua, Γ è C^1 su $\mathring{D} = \{ u^2+v^2 < 1 \}$

(a) Γ iniettiva. $\qquad \Gamma(u_1, v_1) = \Gamma(u,v) \Leftrightarrow$

$$(u_1, v_1, \sqrt{1-u_1^2-v_1^2}) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

$$\Downarrow$$

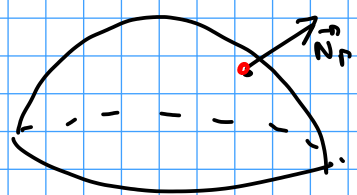
$$u_1 = u \quad v_1 = v$$

(b)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_\Gamma(u,v) = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ \vec{k} & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{u\,\vec{i}}{\sqrt{1-u^2-v^2}} + \frac{v\,\vec{j}}{\sqrt{1-u^2-v^2}} + \vec{k} = \begin{pmatrix} u/\sqrt{1-u^2-v^2} \\ v/\sqrt{1-u^2-v^2} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$



(SI PUÒ NOTARE CHE $\vec{N}_\Gamma(u,v) = \frac{\Gamma(u,v)}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$)

CHI È $S = \Gamma(D)$??

$$\boxed{S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z \geq 0\}}$$

IN EFFETTI è chiaro che $S \subset \{x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$

(basta guardare la definizione di $\Gamma(u,v)$). Viceversa se

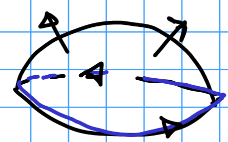
$\underline{x^2+y^2+z^2=1}$ posso scrivere $z^2 = 1-x^2-y^2$ e $x^2+y^2 \leq 1$ e

se $z \geq 0$ $\Rightarrow$ $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ con $(x,y) \in D$

CHI È $\Sigma(S)$??

So che $\partial D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 = 1\}$

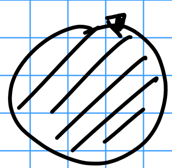
$\Rightarrow \Sigma(S) = \Gamma(\{(u,v) : u^2+v^2=1\}) = \{(u,v,0) : u^2+v^2=1\}$



Qual è il verso di $\Sigma(S)$: quel è un cammino che descrive $\Sigma(D)$ coerentemente con Γ :

Posso descrivere ∂D "con verso canonico" usando

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$



$\Rightarrow$ descrivo $\Sigma(S)$ mediante

$$\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \qquad \tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

<u>ESEMPIO</u> Consideriamo (coordinate sferiche)

$$\Gamma(\theta, \varphi) = (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi))$$

$$(\theta, \varphi) \in D = \{0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2\}$$

Γ è di classe C^1 (su tutto $\mathbb{R}^2$)

- <u>Γ NON È INIETTIVA</u> (su D) è facile vedere che

  - $\Gamma(0, \varphi) = \Gamma(2\pi, \varphi) \qquad \forall \varphi$
  - $\Gamma(\theta, 0) = (0, 0, 1) \qquad \forall \theta$

Però Γ è iniettiva in $\mathring{D} = \{0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi/2\}$

Γ non può essere una sup. parametrica secondo la definizione fatta. — PERÒ VEDIAMO LO STESSO COSA CI PORTANO LE DEFINIZIONI IN QUESTO CASO

· Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Gamma = \sin\varphi\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}\Gamma = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\sin\theta\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}$$

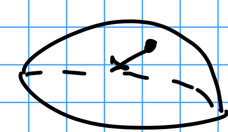
$$\vec{N}_\Gamma(\theta,\varphi) = \sin\varphi \det\begin{bmatrix}\vec{i} & -\sin\theta & \cos\varphi\cos\varphi\\ \vec{j} & \cos\theta & \cos\varphi\sin\theta\\ \vec{k} & 0 & -\sin\varphi\end{bmatrix} =$$

$$\sin\varphi\left(\vec{i}\,(-\cos\theta\sin\varphi) - \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}(-\sin^2\theta\cos\varphi - \cos^2\theta\cos\varphi)\right)$$

$$\sin\varphi\left(-\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} - \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \cos\varphi\,\vec{k}\right) =$$

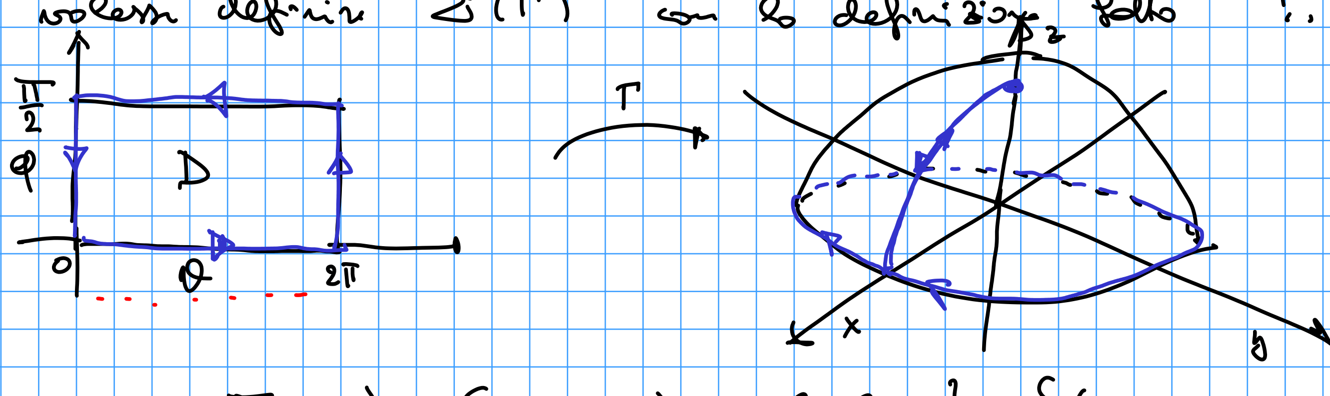
$-\sin\varphi\,\Gamma(\theta,\varphi)$ (si vede poi che $\|\Gamma(\theta,\varphi)\| = 1$)

$$\vec{N}_\Gamma(\theta,\varphi) = -\sin\varphi\,\Gamma(\theta,\varphi)$$



· $\Gamma(D) = \{x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$ ($0\leq\varphi\leq 2\pi \Rightarrow \cos\varphi\geq 0$)

· Se volessi definire $\Sigma(\Gamma)$ con la definizione fatta ??



Mi verrebbe $\Sigma(D) = \{(x,y,0)\ \ x^2+y^2=1\} \cup \{(x,0,z)\ \ z\geq 0,\ x^2+z^2=1\}$

NON VA BENE

È UN DIFETTO DELLA Γ

DEF. Chiamo superficie CARTESIANA UNA

SUP. PARAMETRICA fatta nel modo seguente

$$\Gamma(u,v) = (u, v, g(u,v)) \qquad (u,v) \in D$$

$g: D \to \mathbb{R}$

D dominio regolare e chiuso di $\mathbb{R}^2$, LIMITATO

È chiaro che $\Gamma(D)$ = grafico di g

$$= \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \ z = g(x,y)\}$$

VERIFICHIAMO CHE è una sup. parametrica.

- INIETTIVA ← OVVIO

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_\Gamma = \det \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 0 & 1 \\ k & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{\partial g}{\partial u}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) + \vec{k} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial u} \\ -\frac{\partial g}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

grafico di G = $\Gamma(D) = S$

$$\Sigma(S) = \{(u, v, g(u,v)) \quad (u,v) \in D\}$$

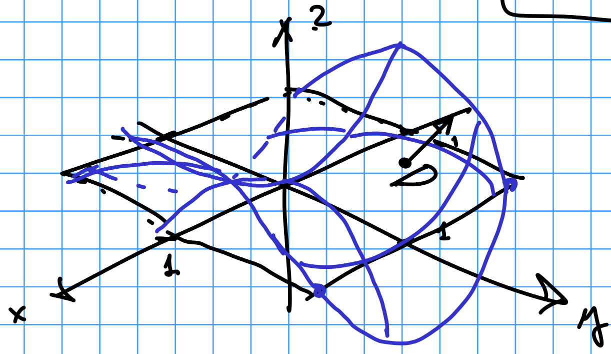
- NOTIAMO LA CALOTTA SFERICA DEL PRIMO ESEMPIO È IL GRAFICO DI $g(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$ $\quad (u,v) \in \{u^2+v^2 \leq 1\}$

ALTRO ESEMPIO $\quad D = \{-1 \leq u \leq 1, \ -1 \leq v \leq 1\}$

$$g(u,v) = u^2 - v^2$$

$$S = \{(x,y,z) : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1, \ z = x^2 - y^2\}$$

$S = \Gamma(D)$ dove $\underbrace{\Gamma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)}$



(SELLA)

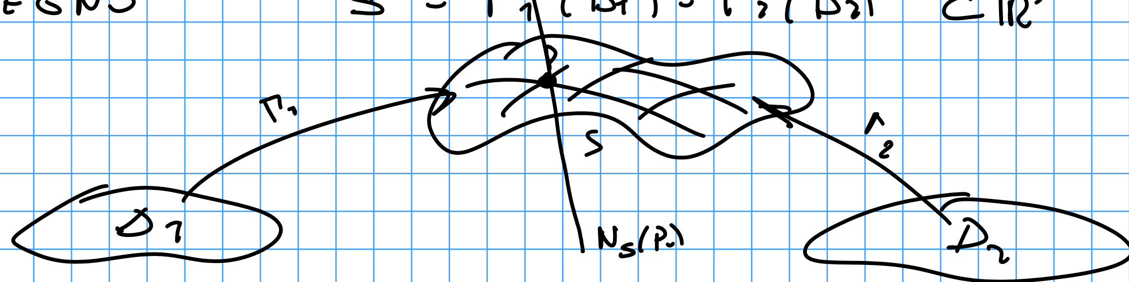
$g(u,v) = u^2 - v^2$

$\frac{\partial g}{\partial u} = 2u \qquad \frac{\partial g}{\partial v} = -2v$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S \Rightarrow P_0 = \Gamma(x_0, y_0)$

$\vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè $N_\Gamma(P_0) = \begin{pmatrix} -2x_0 \\ 2y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

__Proposizione__ Se $\Gamma_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ $\Gamma_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ sono due superfici parametriche AVENTI LO STESSO SOSTEGNO $S = \Gamma_1(D_1) = \Gamma_2(D_2) \subset \mathbb{R}^3$



__ALLORA__ :

- $\Sigma(\Gamma_1) = \Sigma(\Gamma_2)$ (posso indicarla con $\Sigma(S)$)
- Se $P \in S$ e se $P = \Gamma_1(u_1, v_1) = \Gamma_2(u_2, v_2)$
  $\Rightarrow T_{\Gamma_1}(u_1, v_1) = T_{\Gamma_2}(u_2, v_2)$ (posso indicarlo con $T_S(P)$)
  (non è detto che $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u_2}$ / $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial v_2}$)
- Se $P \in S$ e $P = \Gamma_1(u_1, v_1) = \Gamma_2(u_2, v_2) \Rightarrow$

$$\{\lambda N_{\Gamma_1}(u_1, v_1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda N_{\Gamma_2}(u_2, v_2), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(posso indicarlo con $N_S(P)$)

Dunque $N_{\Gamma_1}(u_1, v_1) = \lambda\, N_{\Gamma_1}(u_1, s_2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$

CI SONO DUE CASI $\lambda > 0$ / $\lambda < 0$

$\simeq$ Dato S c'è automaticamente una divisione delle superfici Γ con $\Gamma(D) = S$ in due classi $\simeq$ corrisponde a decidere qual è il "sopra" e il "sotto" di S

\#

(NO DIM.)