Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 54 8/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

TEOREMA $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, se $\vec{f}$ è irrotazionale e se Ω è stellato rispetto a un suo punto x_0 $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo

DIM. Dato $x \in \Omega$ considero γ_x la curva

$$\boxed{\gamma_x(s) = x_0 + s(x - x_0)} \qquad \gamma_x' = (x - x_0) \qquad \underline{0 \le s \le 1}$$

(γ_x è il segmento tra x_0 e x). Definisco

$$V(x) = \int_{\gamma_x} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

DICO CHE V è un potenziale per $\vec{f}$ ($\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V(x) = f_i(x) \qquad i = 1 \dots N \qquad \forall x \in \Omega$$

Considero il rapporto incrementale $\qquad \hat{e}_i$ = versore i-esimo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-esimo}$

$$\frac{V(x + t\hat{e}_i) - V(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_{\gamma_{x+t\hat{e}_i}} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_x} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right) =$$

$$\frac{1}{t}\left(\int_0^1 \left[\vec{f}(x_0 + s(x + t\hat{e}_i - x_0)) \cdot (x + t\hat{e}_i - x_0) - \vec{f}(x_0 + s(x - x_0)) \cdot (x - x_0) \right] ds \right) =$$

$$\frac{1}{\cancel{t}}\int_0^1 \vec{f}(x_0+s(x+t\hat{e}_i-x_0))\cdot(\cancel{t}\hat{e}_i)\,ds +$$

$$\int_0^1 \Big(s\,\underbrace{\frac{\vec{f}(x_0+s(x-x_0)+st\hat{e}_i)) - \vec{f}(x_0+s(x-x_0))}{st}}\Big)\cdot(x-x_0)\,ds$$

Diamo per buono che possa al limite sotto il segno di integrale
(lo si può dimostrare usando il fatto che $\vec{f}$ è C^1) $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0}\frac{V(x+t\hat{e}_i)-V(x)}{t} = \int_0^1 \vec{f}(x_0+s(x-x_0))\cdot\hat{e}_i\,ds +$$

$$\int_0^1 s\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{f}(x_0+s(x-x_0))}\cdot\underbrace{(x-x_0)}\,ds = \int_0^1 f_i(x_0+s(x-x_0))\,ds +$$

$$\int_0^1 s\Big(\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0+s(x-x_0))\,(x-x_0)_j\Big)ds = \int_0^1 f_i(x_0+s(x-x_0))\,ds +$$

$$\int_0^1 s\Big(\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0+s(x-x_0))\,(x-x_0)_j\Big)ds =$$

$$\int_0^1 \Big(f_i(x_0+s(x-x_0)) + s\nabla f_i(x_0+s(x-x_0))\cdot(x-x_0)\Big)ds =$$

derivata della funzione composta

$$\int_0^1 \frac{d}{ds}\Big(\underbrace{s\,f_i(x_0+s(x-x_0))}\Big)ds =$$

$$\Big[\underset{1}{s}\,f_i(\underbrace{x_0+s(x-x_0)}_{x_0+x-x_0})\Big]_{s=0}^{s=1} = f_i(x) - 0$$

DUNQUE $\frac{\partial V}{\partial x_i} = f_i \Leftarrow V$ è un potenziale per $\vec{f}$ $\#$

C'È UN TEOREMA PIÙ GENERALE

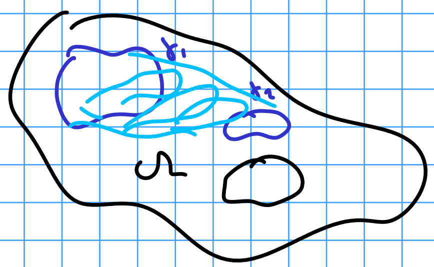
<u>Def.</u> (2) Supponiamo che γ_1 e γ_2 siano due curve chiuse in Ω

$i=1,2 \quad \gamma_i : [a,b]\to\Omega \qquad \gamma_i(a)=\gamma_i(b)$

DICO CHE γ_1 e γ_2 sono <u>OMOTOPE</u> - come curve chiuse - in Ω
se esiste una funzione continua <u>$H:[a,b]\times[0,1]$</u> tale che

- $H(t,0) = \gamma_1(t)$ $\quad H(t,1) = \gamma_2(t)$ $\quad a \le t \le b$
- $H(a,s) = H(b,s)$ $\quad \forall s \in [0,1]$

(γ_1 si deforma a γ_2 in Ω, mediante un continuo di curve chiuse)



($\forall s \in [0,1]$ $\quad H(\cdot, s)$ è una curva chiusa in Ω

se $s=0$ ho γ_0

se $s=1$ ho γ_1

(b) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$, aventi gli stessi estremi:
$\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ $\quad \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

Dico che γ_1 e γ_2 sono OMOTOPE – a estremi fissi – se
$\exists\ H : [a,b] \times [0,1]$ continua e tale che

- $H(t,0) = \gamma_1(t)$; $\quad H(t,1) = \gamma_2(t)$
- $H(a,s) = H(a,0)$ $\quad \forall s \in [0,1]$
  $H(b,s) = H(b,0)$ $\quad \forall s \in [0,1]$

TEOREMA: Se $\vec{f}$ è irrotazionale su Ω e se $\gamma_1\ \gamma_2$ sono due curve chiuse OMOTOPE IN Ω – come curve chiuse

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad (\star)$$

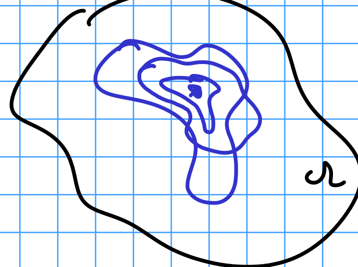
- Stesso risultato $(\star)$ se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi e sono omotope a estremi fissi.

NO DIM.

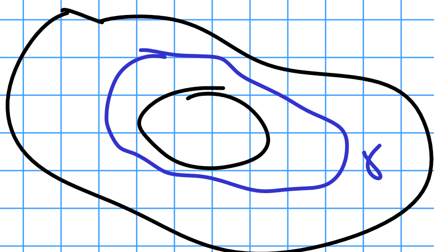
Def. Dico che un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa in Ω è omotopa a una (curva) costante

$\rightsquigarrow$ $\forall\, \gamma : [a,b] \to \Omega$ $\Rightarrow \exists\, H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ t.c.
γ chiusa

- $H(t,0) = \gamma(t)$ $\qquad \forall t \in [a,b]$
- $H(a,s) = H(b,s)$ $\qquad \forall s \in [0,1]$
- $H(t,1) =$ costante $\qquad \forall t \in [a,b]$



SEMPLICEMENTE CONNESSO



NON s.c. LA γ in blu non si può deformare a un punto <u>IN Ω</u> (non è facile da dim.)

<u>CONSEGUENZA</u> Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω aperto semplicemente connesso e se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è irrotazionale $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo.

<u>DIM</u> Se γ è una qualunque curva chiusa $\Rightarrow$ (Ω è semp. conn.)

- γ è omotopa a una (opportuna) costante $x_0 \in \Omega$ ($\gamma_0(t) = x_0 \quad \forall t$)

Per il Teorema ho che

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

facile da verificare $\Leftarrow \gamma_0'(t) = 0$

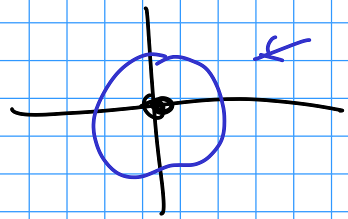
DUNQUE $\underbrace{\forall\, \gamma \text{ chiusa ho } \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0}$

$\Updownarrow$

$\vec{f}$ è conservativo

#

DUNQUE $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON È SEMPLIC. CONN.



NON LA POSSO "SZACCIARE DA $(0,0)$"

$$\vec{f}(x,y,z) = e^{x^2yz}\left(2xyz\,\vec{i} + x^2z\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}\right)$$

VEDIAMO SE $\vec{f}$ è conservativo. Noto che $\vec{f}$ è C^1 (C^∞), e che è definito su $\mathbb{R}^3$ che è stellato. VEDIAMO se è irrotazionale.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad (1) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad (2) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \quad (3)$$

(1) $$\frac{\partial}{\partial y} 2xyz\, e^{x^2yz} = \frac{\partial}{\partial x} x^2z\, e^{x^2yz} \iff$$

$$2xz\, e^{x^2yz} + 2xyz\, x^2z\, e^{x^2yz} \quad \Big| \quad e^{x^2yz}\left(2xyz\, x^2z + 2xz\right)$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial z} e^{x^2yz}\, 2xyz = \qquad \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2yz}\, x^2y =$$

$$e^{x^2yz}\left(x^2y\, 2xyz + 2xy\right) \quad \Big| \quad e^{x^2yz}\left(2xyz\, x^2y + 2xy\right)$$

(3) va anche questa ..

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo. Cerchiamo un potenziale:

MODO POSSIBILE: Dato $(x,y,z) \in \mathbb{R}$. considero

$$\gamma(t) = t(x,y,z) \qquad \left(\gamma'(t) = (x,y,z)\right) \quad \text{e pongo}$$
$$0 \leq t \leq 1$$

$$V(x,y,y) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} =$$

$$\int_0^1 e^{t^4x^2yz}\left(t^3\,2xyz\,\vec{i} + t^3x^2z\,\vec{j} + t^3x^2y\,\vec{k}\right)\cdot\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)dt =$$

$$\int_0^1 e^{t^4x^2yz}\cdot t^3\left(2x^2yz + x^2yz + x^2yz\right)dt =$$

$$\int_0^1 e^{t^4x^2yz}\cdot 4t^3x^2yz\,dt = \int_0^{x^2yz} e^s\,ds = \left[e^s\right]_0^{x^2yz} =$$

$$s = t^4x^2yz \qquad\qquad e^{x^2yz} - 1$$

$$ds = 4t^3x^2yz$$

$$\Rightarrow \quad V(x,y,z) = e^{x^2yz} + \text{costante}$$