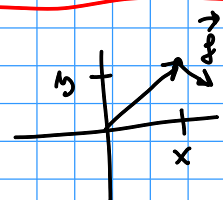
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

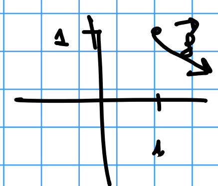
Lezione 53 7/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESEMPIO Consideriamo $\boxed{\vec f(x,y) = \frac{y\,\vec i}{x^2+y^2} - \frac{x\,\vec j}{x^2+y^2}} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

NOTA $\vec f(x,y)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$





$\vec f$ è definito su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Esiste un potenziale per $\vec f$?! $\exists\, V : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ C^1 t.c.

(1) $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$ (2) $\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

(1) sia $\boxed{y \neq 0}$ $V(x,y) = \int \frac{y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}$ $\xi = \frac{x}{y}$ $d\xi = \frac{dx}{y}$

$\int \frac{d\xi}{\xi^2+1} = \arctan(\xi) + c \Rightarrow \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$

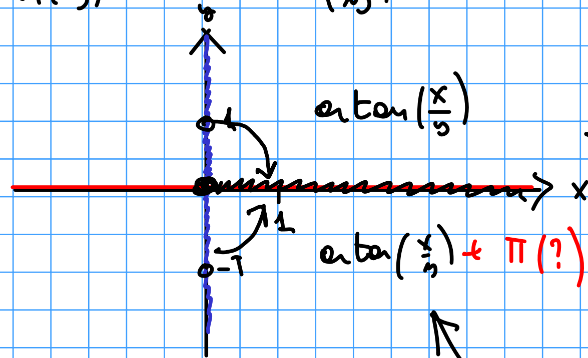
(2) Noto che se derivo rispetto a y la funzione trovata $\Rightarrow$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\left(-\frac{1}{y^2}\right) + c'(y) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right) + c'(y) = -\frac{1}{x^2+y^2} + c'(y)$$

se impongo la (2) ho $c'(y)=0$ e quindi la trovata

$V(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R} \qquad$ se $y \neq 0$

IN $\mathbb{R}^2$



$\begin{cases} \text{se } (x,y) \to (1,0) \text{ "da sopra"} \\ \frac{x}{y} \to +\infty \quad (y \to 0^+) \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \to \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{se } (x,y) \to (1,0) \text{ "da sotto"} \\ \frac{x}{y} \to -\infty \quad (y \to 0^-) \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \to -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

- Nel punto $(1,0)$ le due definizioni di $V(x,y)$ tendono a valori diversi ☹
  NON POSSO "RACCORDARE" le due def.
- PERÒ ho una costante libera. Potrei prendere

$$V(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \pi & y < 0 \end{cases}$$

IN QUESTO MODO se $(x,y) \to (1, 0^+) \Rightarrow V(x,y) \to \frac{\pi}{2}$

se $(x,y) \to (1, 0^-) \Rightarrow V(x,y) \to -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$

SI RACCORDANO IN $(1,0)$

IN REALTÀ LE DUE DEF. SI RACCORDANO in tutti i punti $(\bar{x}, 0)$ con $\bar{x} > 0$; come sopra $(x,y) \to (\bar{x}, 0^+) \Rightarrow V(x,y) \to \arctan\left(\frac{\bar{x}}{0^+}\right) =$

$= \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

$(x,y) \to (\bar{x}, 0^-) \Rightarrow V(x,y) \to \arctan(-\infty) + \pi = \frac{\pi}{2}$

PERÒ se adesso $(x,y) \to (-1, 0^+) \Rightarrow$

$V(x,y) \to \arctan\left(\frac{-1}{0^+}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

DIVERSI

invece se $(x,y) \to (-1, 0^-)$

$V(x,y) \to \arctan\left(\frac{-1}{0^-}\right) + \pi = \arctan(+\infty) + \pi = \frac{3}{2}\pi$

- NON RIESCO A TROVARE UN POTENZIALE SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

IN EFFETTI $\vec{g}$ NON È CONSERVATIVO SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

perché trovo una curva chiusa γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ t.c.

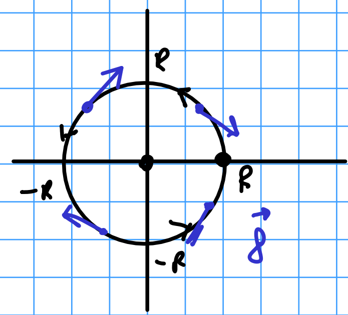
$$\int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

Prendo γ che descrive una circonferenza di raggio R intorno a $(0,0)$ (verso antiorario)

$$\gamma(t) = R\big(\cos(t), \sin(t)\big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = R\big(-\sin(t), \cos(t)\big)$$

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$$



Se calcolo

$$\int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\left(\frac{R\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \vec{i} - \frac{R\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \vec{j} \right)\left(-R\sin(t)\,\vec{i} + R\cos(t)\,\vec{j}\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t) - \cos^2(t)\right) dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi \neq 0$$

ALTRO MOTIVO PER CONCLUDERE CHE $\vec{g}$ NON È CONSERVATIVO

- SE INVECE PRENDO $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

$\Rightarrow V(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ è un potenziale per $\vec{g}$ su Ω

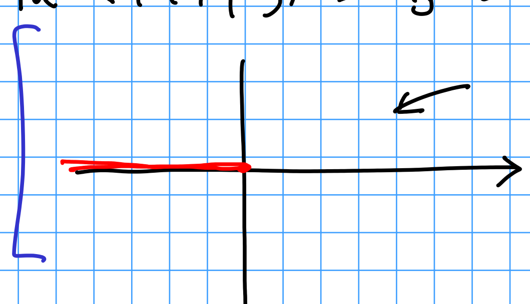
(si è visto sopra)

- STESSO DISCORSO su $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y < 0\}$

(posso usare la stessa espressione di $V(x,y)$)

- POSSO ANCHE DEFINIRE V potenziale su

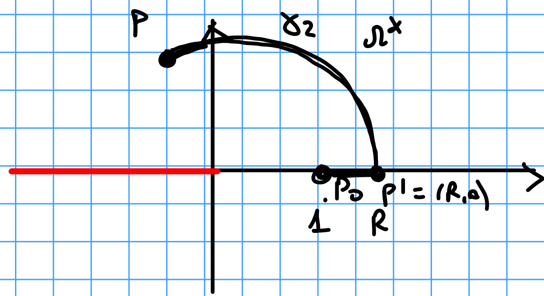
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0 \;\; x \leq 0\}$$



Qui $\vec{g}$ è conservativo e un suo potenziale è definito

$$V(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y > 0 \\ \pi/2 & y = 0 \text{ (MA } x > 0) \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \pi & y < 0 \end{cases}$$

• Vediamo come si può ricavare un potenziale per $\vec{f}$ su $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y=0 \ \ x \le 0\}$, utilizzando la caratterizzazione vista ieri. Fisso $P_0 = (1,0)$ e dato $(x,y) = P$



pongo $V(P) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$

dove γ è un arco in Ω^* che congiunge P_0 a P

Dato $P \in \Omega^*$, posso scrivere $P = R(\cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j})$ $\quad -\pi < \theta < \pi$

Definisco $\gamma_2(t) = R(\cos(t\theta)\vec{i} + \sin(t\theta)\vec{j})$ $\quad 0 \le t \le 1$

$$\gamma_2(0) = R(\cos(0)\vec{i} + \sin(0)\vec{j}) = R\vec{i} = (R,0) = P'$$

$(R = \|P\| = \|P'\|)$ $\quad \gamma_2(1) = R(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = P$

Definisco $\gamma_1(t) = P_0 + t(P' - P_0) = \vec{i} + t(R-1)\vec{i}$ $\quad 0 \le t \le 1$

e infine dico $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ (congiunge P_0 a P)

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underset{①}{\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s}} + \underset{②}{\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}}$$

$$① = \int_0^1 \vec{f}\big(\vec{i}\,\underbrace{(1 + t(R-1))}_{\gamma_1(t)}\big) \cdot \underbrace{(R-1)\vec{i}}_{\gamma_1'(t)}\, dt =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t(R-1)}\vec{j} \cdot (R-1)\vec{i}\, dt = 0 \qquad (\vec{j} \cdot \vec{i} = 0)$$

② ?. $\quad \gamma_2'(t) = R\theta(-\sin(t\theta)\vec{i} + \cos(t\theta)\vec{j})$

$$\int_0^1 \frac{1}{\cancel{R^2}}\left(\cancel{R}\sin(t\theta)\vec{i} - \cancel{R}\cos(t\theta)\vec{j}\right) \cdot \cancel{R}\theta\left(-\sin(t\theta)\vec{i} + \cos(t\theta)\vec{j}\right) dt$$

$$= \theta \int_0^1 \big(\underbrace{-\sin^2(t\theta) - \cos^2(t\theta)}_{-1}\big)\, dt = -\theta$$

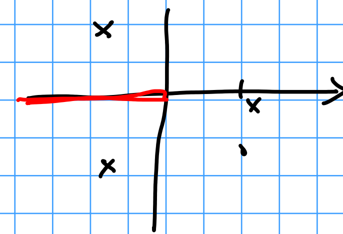
$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$V(x,y) = -\theta$ dove θ è tale che

$$\underbrace{(x,y) = R(\cos\theta, \sin\theta) \qquad -\pi < \theta < \pi}_{??}$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = \tan(\theta)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{se } x>0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}}$$



se $x=0$ $y>0$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$

se $x=0$ $y<0$ $\quad \theta = -\frac{\pi}{2}$

se $x<0$ $y>0$ $\quad \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

se $x<0$ $y<0$ $\quad \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$

DUNQUE HO TROVATO

$$V(x,y) = (-\theta) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \quad y>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \quad y<0 \\ -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x<0 \quad y>0 \\ -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x<0 \quad y<0 \end{cases}$$

come si confronta con il V precedente ??

Facciamo un conto di Analisi I:

$\varphi(s) = \arctan(s) + \arctan(1/s)$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

(non è definito in zero)

$$\varphi'(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{\frac{1}{s^2}+1}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = 0$$

$\forall s>0 \quad \varphi(s) = \varphi(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\forall s<0 \quad \varphi(s) = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ DUNQUE

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \frac{x}{y} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \frac{x}{y} < 0 \end{cases}$$

DUNQUE

$$V(x,y) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & x>0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x=0 \quad y>0 \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \pi & x<0 \quad y>0 \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & x>0 \quad y<0 \end{cases}$$

$\left.\right\}$ $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2}$ se $y>0$

$\left.\right\}$ $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} & x=0 \quad y<0 \\ -\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\pi & x<0 \quad y<0 \\ 0 & x>0 \quad y=0 \end{cases}$$

$$//$$

$$V(x,y) \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{\pi}{2} & y>0 \\ 0 & y=0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\pi}{2} & y<0 \end{cases}$$

≠ quello dato all'inizio?? $\boxed{\text{No}}$

$$V_0(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y>0 \\ \pi/2 & y=0 \\ \arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\pi & y<0 \end{cases}$$

$$\boxed{V(x,y) = V_0(x,y) - \frac{\pi}{2}}$$

TORNA CHE SONO ENTRAMBI POTENZIALI.

Dato un campo tridimensionale $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto

$\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$

Def. Sia $\vec{f}$ di classe C^1. Chiamo rotore di $\vec{f}$

$\vec{\nabla} \otimes \vec{f}$ o $\mathrm{Rot}\,\vec{f}$ il campo definito da

"FORMALMENTE"

$$\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & f_1 \\ \vec{j} & \partial/\partial y & f_2 \\ \vec{k} & \partial/\partial z & f_3 \end{bmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + -\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}f_3 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

DI FATTO $\mathrm{rot}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

FATTO Se $\vec{f}$ di classe C^1 è conservativo $\Rightarrow \mathrm{Rot}(\vec{f}) = 0$

PIU' IN GENERALE posso dire che

$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow$ $\vec{f}$ IRROTAZIONALE

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$

cioè $\boxed{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j \text{ da } 1 \text{ ad } N}$

DIM. Supponiamo $\vec{f}$ conservativo e sia V potenziale.

$\Rightarrow$ $f_i := \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f_i = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}$ ANALOG.

$\dfrac{\partial}{\partial x_i} f_j = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ uguali per Schwartz !!

(V, per costruzione, è C^2 !!)

$\vec{f}$ campo di classe C^1

$\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow$ $\vec{f}$ irrotazionale

LA FRECCIA $\Leftarrow$ È FALSA

CRITERIO DI "NON CONSERVATIVITÀ"

$$\vec{f}(x,y) = \underbrace{(x+y)}_{f_1}\vec{i} + \underbrace{(y-x)}_{f_2}\vec{j}$$

$$1 = \frac{\partial (x+y)}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial (y-x)}{\partial x} = -1 \quad \neq$$

$\vec{f}$ NON È CONSERVATIVO

$\boxed{\Leftarrow \text{ è falso}}$ Basta guardare l'esempio $\boxed{\vec{f}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}}$

che NON È CONSERVATIVO su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, come visto prima, dato che

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = -2\pi \neq 0$$

se γ è una qualunque circonferenza intorno all'origine

PERÒ verifichiamo che $\vec{f}$ è irrotazionale:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

SONO UGUALI

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2)+x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

IL PROBLEMA È NELLA FORMA DEL DOMINIO

QUELLO CHE IMPEDISCE a $\vec{f}$ di essere conservativo è

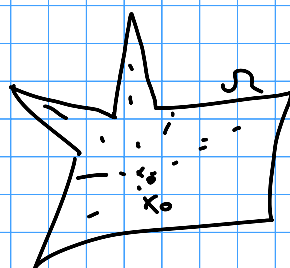
"LA PRESENZA DEL BUCO" $\quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

SE FACCIO DELLE IPOTESI SUL DOMINIO Ω, posso invertire la freccia.

Def. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \Omega$. Dico che Ω è <u>STELLATO</u> rispetto a x_0 se $\forall x \in \Omega$ il segmento tra x_0 e x è tutto contenuto in Ω

$\Updownarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in \Omega \quad \forall t \in [0,1] \\ x_0 + t(x-x_0) \in \Omega\end{array}}$$



(se metto una luce in x_0 illumino tutto Ω)

TEOREMA $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$, se $\vec{f}$ è irrotazionale. se Ω è stellato rispetto a un suo punto $x_0 \Rightarrow \vec{f}$ è conservativo

DIM. Dato $x \in \Omega$ considero γ_x la curva

$$\gamma_x(t) = x_0 + t(x-x_0) \qquad \gamma_x' = (x-x_0) \qquad 0 \le t \le 1$$

(γ_x è il segmento tra x_0 e x). Definisco

$$V(x) = \int_{\gamma_x} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

DICO CHE, V è un potenziale per $\vec{f}$ ($\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo)

LA FINIAMO DOMANI