Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

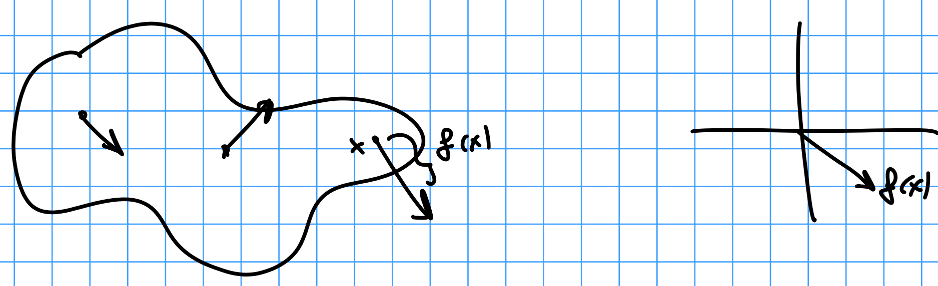
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 52   6/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CAMPI VETTORIALI - CAMPI CONSERVATIVI

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Ω aperto. $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ si chiama <u>campo</u> di vettori



Un campo può essere continuo / C^1 / C^k $k \in \mathbb{N}$ se $\vec{f} = (f_1 \dots f_N)$ è $C^0 / C^1 / \dots C^k$

Se $\vec{f}$ è un campo $\Rightarrow \vec{f} = (f_1 \dots f_N)$ f_i $i = 1 \dots N$
COMPONENTI del campo $\vec{f}$

Se $N = 3$ (o $N = 2$) usiamo la notazione $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ per indicare i versori $\vec{\imath} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

In questo modo $\boxed{\vec{f} = f_1 \vec{\imath} + f_2 \vec{\jmath} + f_3 \vec{k}}$.

PER ESEMPIO

$$f(x,y,z) = xy\,\vec{i} + \frac{z^2}{x}\,\vec{j} + e^{-xyz}\,\vec{k} = \begin{pmatrix} xy \\ z^2/x \\ e^{-xyz} \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \sin(y)\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Def. Dico che un campo $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$ è <u>CONSERVATIVO</u> se esiste $V : \Omega \to \mathbb{R}$ (V è scalare) V differenziabile e tale che

$$\nabla V = \vec{f} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} = f_i \qquad i = 1 \dots N \right)$$

Tale V, quando esiste, si chiama potenziale di $\vec{f}$ (o primitiva di $\vec{f}$) #

<u>Per esempio</u>

$$\vec{f}(x,y) = (x+y)\,\vec{i} + (x-y)\,\vec{j} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$(\forall x, y \in \mathbb{R} \to \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

$\vec{f}$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ le sue componenti sono

$$f_1(x,y) = x+y \qquad f_2(x,y) = x-y$$

Dico che $\vec{f}$ è conservativo. Per mostrarlo devo esibire un potenziale $V(x,y)$

① $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = x+y$ ② $\dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = x-y$

Vediamo se si trova una tale V

① $\iff$ $V(x,y) = \int (x+y)\,dx = \dfrac{x^2}{2} + xy + c(y)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 0 + x + c'(y)$ se vale ② ottengo

$$x + c'(y) = x - y \iff c'(y) = -y$$

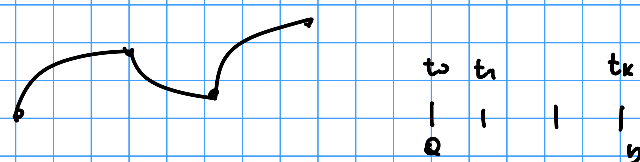
$c(y) = -\frac{y^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$. In definitiva

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy + c$$ è un potenziale per f $(\forall c \in \mathbb{R})$

VOGLIAMO TROVARE DEI CRITERI CHE CI PERMETTANO DI DECIDERE SE UN CAMPO È CONSERVATIVO

INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE

Def Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un campo continuo $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è una curva in Ω, γ C^1 a tratti (γ è continua ed è unione di curve C^1 definite su sottintervalli $\gamma : [t_i, t_{i+1}] \to \Omega$



$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

PRODOTTO SCALARE

Se per esempio $\vec{f} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$

γ è il segmento tra $(0,0)$ e $(1,1)$

cioè $\gamma(t) = t(1,1)$ $\boxed{0 \le t \le 1}$ $(\gamma(0) = (0,0) \quad \gamma(1) = (1,1)$

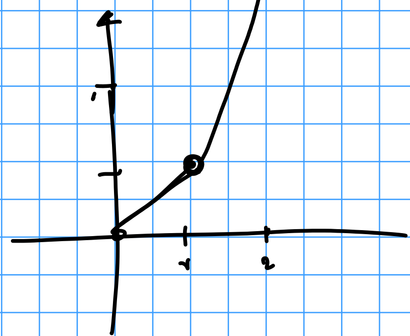
$(\gamma$ è $C^1)$ $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j}$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \left((t \cdot 1 + t\,1)\,\vec{i} + (t \cdot 1 - t \cdot 1)\,\vec{j} \right) \cdot (\vec{i} + \vec{j})\, dt =$$

$$\int_0^1 (2t\,\vec{i} + 0 \cdot \vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j})\, dt = \int_0^1 2t = [t^2]_0^1 = 1$$

#

Se voglio una curva non C^1 posso considerare



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ $\qquad$ $\gamma_1 =$ segmento tra $(0,0)$ e $(1,1)$

$\gamma_2 =$ segmento tra $(1,1)$ e $(2,3)$

$$\gamma_2(t) = (1,1) + t\big((2,3)-(1,1)\big) = (1,1)+t(1,2)$$

$$\gamma_2'(t) = (1,2) = \vec{i} + 2\vec{j}$$

In questo caso

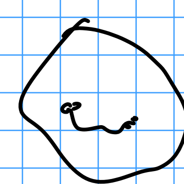
$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{=1} + \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot ds = 1 + \int_0^1 \vec{f}(\gamma_2(t))\cdot(\vec{i}+2\vec{j})\,dt$$

$$= 1 + \int_0^1 \Big((1+t)\vec{i} + (1+2t)\vec{j}\Big)(\vec{i}+2\vec{j})\,dt =$$

$$= 1 + \int_0^1 \Big((1+t) + (1+2t)2\Big)dt = 1 + \int_0^1 (3+5t)\,dt =$$

$$1 + \Big[3t + \frac{5}{2}t^2\Big]_0^1 = 1 + 3 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$ } !!

TEOREMA Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ (Ω connesso) $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua.



Sono equivalenti i tre fatti seguenti

(a) $\vec{f}$ è conservativo.

(b) Su ogni curva $\gamma: [a,b] \to \Omega$, C^1 a tratti, CHIUSA

$$\oint_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$$

(c) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$, C^1 a tratti e se

$\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ (HANNO GLI STESSI ESTREMI)

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

INOLTRE se $\vec{f}$ è conservativo e V è un potenziale per $\vec{f}$

(d) Per ogni $\gamma : [a,b] \to \Omega$ C^1 a tratti si ha:

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

DIM. (a) $\Rightarrow$ (d) Supponiamo che V sia un potenziale per $\vec{f}$ e che $\gamma : [a,b] \to \Omega$, γ di classe C^1 (– il caso C^1 a tratti si ricava da questo in modo semplice)

ALLORA

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

V è un potenziale per $\vec{f}$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} V(\gamma(t)) \cdot dt = \Big[V(\gamma(t)) \Big]_a^b = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

derivata della funzione composta

HO ANCHE DIMOSTRATO (a) $\Rightarrow$ (c)

(c) $\Rightarrow$ (b) è abbastanza ovvio.

Supponiamo che γ sia chiusa, cioè $\gamma(a) = \gamma(b) = P$

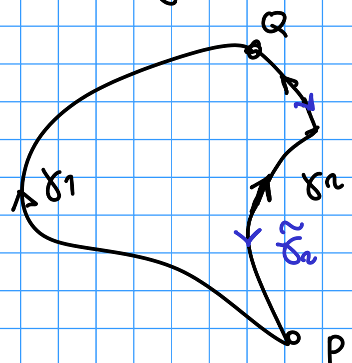
Prendo $\hat{\gamma} : [a,b] \to \Omega$ $\hat{\gamma}(t) = P$. γ e $\hat{\gamma}$ hanno gli stessi estremi $\gamma(a) = P = \hat{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = P = \hat{\gamma}(b)$

Per la (c) $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\hat{\gamma}} \vec{f} \cdot ds = 0$ perché

$\hat{\gamma}'(t) = 0 \Rightarrow \int_a^b f(\hat{\gamma}(t)) \cdot \hat{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b f(P) \cdot \vec{0} = 0$

(b) $\Rightarrow$ (c) Supponiamo che γ_1 e $\gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ abbiano gli stessi estremi $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = P$; $\gamma_2(b) = \gamma_1(b) = Q$

(γ_1 e γ_2 C^1 a tratti)



Prendo

$\gamma = \gamma_1 \vee \tilde{\gamma}_2$ $\quad \gamma : [a_1, b_1] \to \Omega$

dove $\tilde{\gamma}_2$ è la γ percorsa in senso opposto

γ è chiusa (C¹ a tratti) $\quad \gamma(a_1) = P = \gamma(b_1)$. Per (b)

$$0 = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

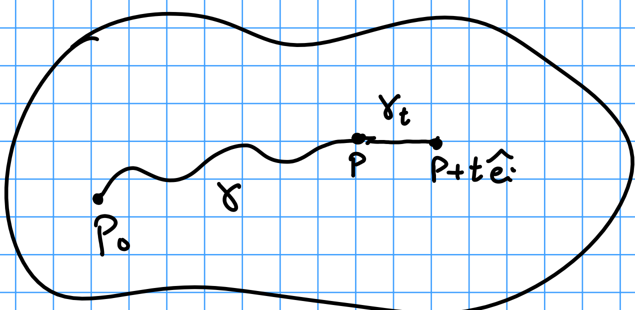
$$\iff \int_{\gamma_1} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

(c) $\Rightarrow$ (a) Fisso P_0 in Ω. Dato che vale (c) posso definire un potenziale

$$\boxed{V(P) = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} \quad \text{dove}}$$

γ è una qualunque curva che congiunge P_0 e P (V non dipende dalla γ che ho scelto per congiungere P_0 a P)

VERIFICO CHE V definito come sopra è un potenziale per $\vec{f}$.



Prendo $P \in \Omega$ e scelgo una γ C^1 a tratti che congiunge P_0 e P (CONTA CHE Ω sia connesso)

$$\boxed{\text{DIMOSTRO CHE } \frac{\partial V}{\partial x_i}(P) = f_i(P) \quad (i = 1 \dots N)}$$

Fisso $i = 1 \dots N$ e prendo $\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-esimo. Voglio:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(P) = \lim_{t\to 0} \frac{V(P+t\hat{e}_i) - V(P)}{t} = f_i(P)$$

$V(P + t\hat{e}_i) \leftarrow t \neq 0 \leftarrow$ mi serve una curva che congiunge P_0 e $P + t\hat{e}_i$

Posso prendere l'incollamento $\gamma \cup \gamma_t$ dove γ_t è il segmento tra P e $P + t\hat{e}_i$. Questo γ_t lo posso scrivere

$\boxed{\text{se } t > 0}$ $\quad \gamma_t(s) = P + s\hat{e}_i \quad 0 \le s \le t \quad \gamma_t(0) = P \quad \gamma_t(t) = P + t\hat{e}_i$

$$\gamma_t'(s) = \hat{e}_i$$

$$V(P+t\hat{e}_i) = \int_{\gamma\vee\gamma_t} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{\gamma} \vec{f}\cdot d\vec{s}}_{V(P)} + \int_{\gamma_t} \vec{f}\cdot d\vec{s} =$$

$$V(P) + \int_0^t \vec{f}(P+s\hat{e}_i)\cdot\hat{e}_i\, ds = V(P) + \int_0^t f_i(P+s\hat{e}_i)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V(P+t\hat{e}_i)-V(P)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t f_i(P+s\hat{e}_i)\, ds$$

se faccio il limite per $\boxed{t \to 0^+}$ trovo (APPLICANDO IL TEOREMA FOND. CALC. INT.)

$$\longrightarrow \quad f_i(P+s\hat{e}_i)\big|_{s=0} = f_i(P)$$

nel caso $t<0$ scrivo

$$\gamma_t(s) = P - s\hat{e}_i \qquad 0 \leq s \leq |t| = -t \qquad \gamma_t' = -\hat{e}_i$$

$$\frac{V(P+t\hat{e}_i)-V(P)}{t} = -\frac{1}{t}\int_0^{-t} f_i(P-s\hat{e}_i)\, ds \qquad \left(\text{cambio di var. } \sigma=-s,\ ds=-d\sigma\right)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^{t} f_i(P+\sigma\hat{e}_i)\, d\sigma \longrightarrow f_i(P)$$

IN OGNI CASO ho trovato

$$\lim_{t\to 0} \frac{V(P+t\hat{e}_i)-V(P)}{t} = f_i(P) \qquad \text{tesi}$$

Vediamo i calcoli fatti prima per il campo $\vec{f} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$

che è conservativo con potenziale $V = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy$

se prendo γ = segmento tra $(0,0)$ e $(1,1)$ – USANDO IL TEOREMA –

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = V(1,1) - V(0,0) = 1$$

Se prendo come $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ $\quad \gamma_1\ \gamma_2$ segmenti

γ_1 da $(0,0)$ a $(1\ 1)$ e γ_2 da $(1\ 1)$ a $(2,3)$

γ va da $(0,0)$ a $(2,3)$ e dunque $\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = V(2,3) - V(0,0) =$

$$\frac{2^2}{2} - \frac{3^2}{2} + 2 \cdot 3 = \frac{4}{2} - \frac{9}{2} + 6 = \frac{4-9+12}{2} = \frac{7}{2}$$

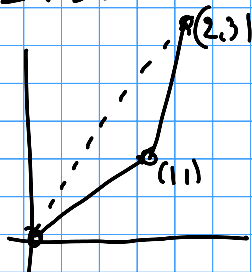
Rifacciamo il calcolo usando la def.

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1 + \overbrace{\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}}^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}$$

$\rightsquigarrow \gamma_2(t) = (\underbrace{1+t}_{x}, \underbrace{1+2t}_{y})$ $\qquad \gamma_2(0) = (1,1) \quad \gamma_2(1) = (2,3) \qquad \gamma_2' = (1,2)$

$$\int_{\gamma_2} \left((x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}\right) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \left((2+3t)\vec{i} + (-t)\vec{j}\right) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j})\, dt =$$

$$\int_0^1 (2+3t-2t)\, dt = \int_0^1 (2+t)\, dt = \left[2t + \frac{t^2}{2}\right] = \frac{5}{2} \qquad \#$$



Se invece prendo $\gamma(t) = t(2,3) = 2t\vec{i} + 3t\vec{j}$ $\qquad 0 \le t \le 0$

(segmento da $(0,0) = (2,3)$) $\qquad \gamma'(t)\ 2\vec{i} + 3\vec{j}$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \left((x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}\right) \cdot d\vec{s} =$$

$$\int_0^1 (5t\vec{i} - t\vec{j})(2\vec{i} + 3\vec{j})\, dt = \int_0^1 (10t - 3t)\, dt = 7\int_0^1 t\, dt = \frac{7}{2}$$

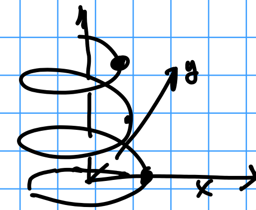
(lo stesso di prima) $\qquad \#$

<u>ESEMPIO</u> $\qquad \vec{f}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad \vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$$\boxed{\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + t\,\vec{k}}$$

$$0 \le t \le 4\pi$$



$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} + \vec{k}}$$

$$\int_0^{4\pi} \left(\frac{\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + t\,\vec{k}}{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2} \right) \cdot \left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} + \vec{k} \right) dt =$$

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+t^2} \left(-\cos\cancel{(t)}\sin(t) + \cos\cancel{(t)}\sin t + t \right) dt = \int_0^{4\pi} \frac{t}{1+t^2}\, dt =$$

$$\left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^{4\pi} = \underbrace{\ln\sqrt{1+16\pi^2}}_{\boxtimes}$$

Vediamo se $\vec{f}$ è conservativo. PROVIAMO a trovare un potenziale

$V(x,y,z)$

① $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ ② $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$ ③ $\dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$

① $\Rightarrow V(x,y,z) = \int \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + C_1(y,z)$

② $\Rightarrow V(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + C_2(x,z)$

③ $\Rightarrow V(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + C_3(x,y)$

① + ② $\Rightarrow C_1(y,z) = C_2(x,z) \Leftarrow$ COSTANTI IN x e y $\Rightarrow$

$C_1 = C_1(z)$
$C_2 = C_2(z)$

se metto anche la ③ $C_3(x,y) = C_1(z) = C_2(z) \Longleftrightarrow$ sono tutte costanti.

$$\Rightarrow \boxed{V(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)}$$

Se guardo la γ di prima vedo che $\gamma(0) = (1,0,0)$

$\gamma(4\pi) = (1,0,4\pi)$

$$\Rightarrow V(\gamma(0)) = V(1,0,0) = \frac{1}{2}\ln(1) = 0$$

$$V(1,0,4\pi) = \frac{1}{2}\ln(1+16\pi^2)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = V(1,0,4\pi) - V(1,0,0) = \underbrace{\ln\sqrt{1+16\pi^2}}_{\boxtimes}$$

\#

CAMPI RADIALI

Def. • $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è RADIALE se

$$P \in \Omega, \quad \|P\| = \|P'\| \Rightarrow P' \in \Omega$$

• $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ (Ω radiale) si dice RADIALE se $\vec{f}(P) = \varphi(\|P\|)\frac{P}{\|P\|}$ per i $P \neq 0$

Per esempio il campo di prima $\vec{f}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$

è radiale, usando $\varphi(r) = \dfrac{1}{r}$; infatti

$$\varphi(\|(x,y,z)\|)\cdot\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\|(x,y,z)\|} = \underbrace{\frac{1}{\|(x,y,z)\|}}_{\varphi(\|\ \|)}\cdot\underbrace{\frac{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{\|(x,y,z)\|}}_{\text{VERSORE}} =$$

$$\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$$

FATTO Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è radiale e $0 \notin \Omega$ e connesso $\Rightarrow$

$\Omega = \{ (x,y,z) \; : \; \|(x,y,z)\| \in]a,b[\; \}$

$\Big($ con $0 \le a < b \le +\infty \Big)$ $= \{ \; a < \|(x,y,z)\| < b \}$

Se poi $\vec{f}$ è radiale, cioè $\vec{f}(P) = \varphi(\|P\|) \dfrac{P}{\|P\|}$

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{f} \text{ È CONSERVATIVO}}$ e posso prendere

$V(P) = \Phi(\|P\|)$ dove $\Phi :]a,b[\to \mathbb{R}$

è primitiva di φ — cioè $\Phi' = \varphi$ $\left(\Phi = \int \varphi(r)\,dr \right)$

V è potenziale per $\vec{f}$ perché

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\|P\|) = \Phi'(\|P\|) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \|P\| = \varphi(\|P\|) \frac{P}{\|P\|}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|P\| = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \right)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 =$$

$$\frac{1}{2\|P\|} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|P\|}$$ $P = (x_1 \dots x_N)$

$\nabla V = \dfrac{P}{\|P\|}$ f

- Il potenziale per $\varphi(\|P\|) \dfrac{P}{\|P\|}$ è $\Phi(\|P\|)$ $(+c)$ dove $\Phi' = \varphi$

- Nell'esempio $\varphi(r) = \dfrac{1}{r}$ $\Rightarrow$ $\Phi(r) = \ln(r)$ e infatti

$$V(x,y,z) = \Phi(\|x,y,z\|) = \ln \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2+z^2)$$

+ costante

#