Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 51 1/04/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESERCIZI

$$x(x-3)y'' - (2x-6)y' - 4y + 12x^2 = 0$$

Si cerchino sol. del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(a) Relazione ricorsiva per i coefficienti a_n ?

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{\substack{n=0\\(n=1)}}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$(m = n-1 \quad n = m+1)$

$$y''(x) = \sum_{\substack{n=0\\(n=1)\\(n=2)}}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{\substack{n=0\\(n=1)}} a_{n+1}(n+1)n\, x^{n-1} \quad \left(= \sum_{n=0} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n \right)$$

NON SERVONO

Se impongo l'equazione $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(a_n n(n-1) - 3a_{n+1}(n+1)n - 2a_n n + 6a_{n+1}(n+1) - 4a_n + b_n \right) = 0$$

$$\left(12x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad b_n = \begin{cases} 12 & n=2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(6-3n)a_{n+1} + (\underbrace{n^2 - n - 2n - 4}_{(n-4)(n+1)})a_n + b_n \right) x^n = 0$$

$m^2 - 3m - 4$ radici $\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$ 4, -1

TROVO

(R) $3(m+1)(2-m)\,a_{m+1} + (m+1)(m-4)\,a_m + b_m = 0 \quad \forall m$

$(2-m)$ si annulla per $n=2$

$\underline{m=2} \Rightarrow \quad 0 + 3(-2)a_2 + b_2 = 0 \iff -6a_2 + 12 = 0$

$\boxed{a_2 = 2}$

$\underline{m=1} \quad 3 \cdot 2 \cdot 1\, a_2 + 2(-3)a_1 = 0 \iff 6a_2 - 6a_1 = 0$

$\boxed{a_1 = 2}$

$\underline{m=0} \quad 3 \cdot 2\, \underset{=2}{a_1} + 1(-4)a_0 = 0 \quad \boxed{a_0 = 3}$

a_3 è libero e se $m \geq 3$ posso riscrivere R:

$$a_{m+1} = \frac{(m-4)\,a_m}{3\,(m-2)} \qquad \underline{m \geq 3}$$

Dato che per $\underline{m=4}$ trovo $a_5 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 5$

Questa serie è un polinomio di grado 4

MANCA SOLO $\underline{m=3}$

$\underline{m=3} \quad a_4 = \frac{(-1)\,a_3}{3\,(1)} \qquad \boxed{a_4 = -\frac{a_3}{3}}$

$$\boxed{a_0 = 3 \qquad a_1 = 2 \qquad a_2 = 2 \qquad 3a_4 = -a_3 \qquad a_n = 0 \ \forall n \geq 5}$$

(b) esiste soluzione y con $y(0) = 0$?? NO

$\boxed{\exists !}$ $\boxed{\exists \text{ non unica}}$ $\boxed{\nexists}$

tutte le $y(x)$ hanno $y(0) = a_0 = 3 \neq 0$

(b') esiste soluzione $y(x)$ con $y(0) = 3$

$\boxed{\exists!}$ $\boxed{\exists \text{ non } \cancel{\text{unico}}}$ $\boxed{\nexists}$

perché ho infiniti possibili valori di a_3 (a_0 e a_1)

(c) Si mostri che esiste un'unica soluzione con $y'''(0) = 6$. Data tale soluzione si calcoli $y^{(IV)}(0)$

Dato che $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow a_3 = \dfrac{y'''(0)}{6} = 1$

Per lo stesso motivo $\dfrac{y^{(IV)}(0)}{24} = a_4 = -\dfrac{a_3}{3} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$$y^{(IV)}(0) = -\frac{24}{3} = -8$$

IN REALTÀ POSSO SCRIVERE ESPLICITAMENTE LA $y(x)$

$$y(x) = 3 + 2x + 2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{3}$$

(d) TROVARE LA y, che risolve l'eq., tale che $y'''(0) = 18$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{18}{6} = 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = -1$$

$$\Rightarrow y(x) = 3 + 2x + 2x^2 + 3x^3 - x^4$$

. NOTA IL RAGGIO DI CONV. $= +\infty$ ($a_n = 0$ $n \geq 5$, $\sqrt[n]{a_n} \to 0$)

#

ESERCIZIO

$$x(4-x)y'' + 4(x-1)y' - 4y = 0 \qquad \text{(OMOGENEA)}$$

(a) rel. ricorsiva !!

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^{n-1}$$

IMPONGO L'EQ. $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(4\, a_{n+1}(n+1)n - a_n\, n(n-1) + 4 a_n n - 4\, a_{n+1}(n+1) - 4 a_n \right) x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1)(4n-4) + a_n\left(\underbrace{-n^2 + n + 4n - 4}_{-n^2+5n-4}\right)\right) x^n = 0$$

radici $\frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(4(n+1)(n-1)a_{n+1} - a_n(n-4)(n-1) \right) x^n = 0$$

(R) $\qquad (n-1)\left(4(n+1)a_{n+1} - (n-4)a_n \right) = 0$

se metto $n=1$ trovo $0=0$ non mi dà niente

se $n \neq 1$ posso scrivere $\boxed{(R)\; a_{n+1} = \frac{1}{4}\frac{(n-4)}{n+1} a_n \quad \forall n \neq 1}$

$n=0$ $\boxed{a_1 = -a_0}$ e poi ho $\boxed{a_{n+1}\; \frac{(n-4)}{(n+1)}\frac{1}{4} \quad n \geq 2}$

se $n=4$ TROVO $a_5 = 0 \Rightarrow \boxed{a_n = 0 \quad \forall n \geq 5}$

$n=2$ $\qquad a_3 = \frac{1}{4}\frac{(-2)}{3} a_2$ $\qquad \boxed{a_3 = -\frac{a_2}{6}}\; ; \; \boxed{a_4 = -\frac{a_2}{106}}$

$n=3$ $\qquad a_4 = \frac{1}{4}\frac{(-1)}{4} a_3 = \frac{-1}{16}\frac{a_2}{6} = \frac{a_2}{106}$

$y(x)$ è un polinomio di grado 4. Posso notare che posso assegnare ad arbitrio a_0 e a_3

(b) $\exists$ soluzione con $y(0)=1$; è unica.

SÌ ESISTE perché posso mettere $a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = -1$

NON È UNICA perché ho ancora libero a_2

(c) $\exists$ UNICA y soluzione t.c. $y'(0) = y''(0) = 48$

CALCOLARLA!!

$y'(0) = 48 \iff \boxed{a_1 = 48} \Rightarrow \boxed{a_0 = -48}$

$y''(0) = 48 \qquad a_2 = \frac{y''(0)}{2} = \boxed{24 = a_2}$

$a_3 = -\frac{a_2}{6} = \boxed{-4 = a_3} \qquad a_4 = -\frac{a_2}{106} = -\frac{24}{16 \cdot 6} = \frac{4}{16}$

$\boxed{a_4 = \frac{1}{4}}$

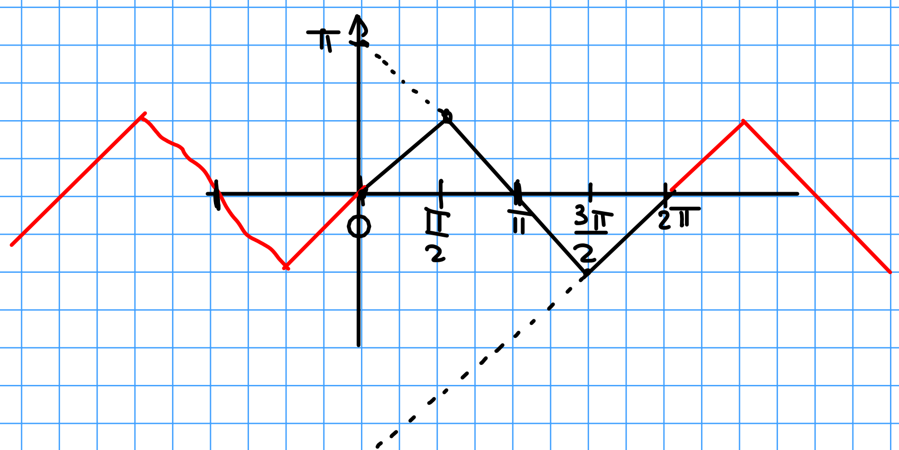
$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -48 + 48x + 24x^2 - 4x^3 + \frac{x^4}{4}}$$

ESERCIZIO

$$\underbrace{f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{se } \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3}{2}\pi \\ t - 2\pi & \text{se } \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi \end{cases}}_{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}}$$

e poi "periodicizzata" di periodo 2π

Voglio lo sviluppo di Fourier. CONVIENE FARSI IL GRAFICO



ONDA TRIANGOLARE DISPARI

(lo vedo dal grafico)

$\omega = 1 \quad \left(= \frac{2\pi}{2\pi}\right) \qquad a_n = 0 \quad \forall n$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin(nt)\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = (\text{per parti})$$

$$\frac{2}{\pi} \left[f(t) \frac{\cos(nt)}{-n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(nt)\, dt \quad +$$

$f(0) = 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\pi}\left[f(t)\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt =$$

$f(\pi)=0$

$$-\frac{2}{\pi n}\frac{\pi}{2}\cancel{\cos(n\pi/2)} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}\cancel{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{2}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nt)\,dt$$

$$\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$\frac{2}{n^2\pi}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}$$

0 n pari

$2 = 2k+1 = (-1)^k$

$$b_n = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}$$