Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 50 31/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Stiamo studiando (E.C) su $B_R = \{x^2+y^2 \le R^2\}$

cerco u del tipo

$$u(x,y,t) = v(t)\,w(x,y) \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

(A) $v'(t) = \lambda\, v(t) \implies v(t) = e^{\lambda t} v(0)$

(B) $\begin{cases} \Delta w = \lambda w \\ w = 0 \text{ su } \partial B_R \text{ (sulla circonferenza)} \end{cases}$

Per risolvere (B) passo in coordinate polari. Posto

$$\Psi(\rho,\theta) = w(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$ trovo:

$$(B_1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\psi}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = \lambda\psi \\ \psi(R,\theta) = 0 \quad \forall\,\theta \in [0,2\pi],\quad \underbrace{\psi(\rho,0) = \psi(\rho,2\pi)} \end{cases}$$

$\theta \mapsto \psi(\rho,\theta)$ è 2π periodico

Cerco $\Psi(\rho,\theta) = \eta(\rho)\,\xi(\theta)$ $\Rightarrow$ trovo $K \in \mathbb{R}$ tale che

(c_1) $\xi''(\theta) = -K\xi(\theta)$ — ξ è 2π periodica

(c_2) $\rho^2\eta'' + \rho\eta' - (K + c\rho^2)\eta = 0$, $\underline{\eta(R) = 0}$

$(c_1) \Rightarrow$ $\underline{K = m^2}$ con $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 0)$ e

$$\xi(\theta) = A\cos(m\theta + \varphi) \qquad (A, \varphi \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ (c_2) si riscrive:

$$\rho^2\eta''(\rho) + \rho\,\eta'(\rho) - (m^2 + c\rho^2)\,\eta(\rho) = 0 \qquad \left(\rho(\rho\eta')' = \rho(\eta' + \rho\eta'') = \rho\eta' + \rho^2\eta'' \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho(\rho\eta')' - (m^2 + c\rho^2)\eta = 0$$

Moltiplico per $\dfrac{\eta}{\rho}$ e integro su $[0, R]$ $\Rightarrow$

$$\int_0^R \eta\,(\rho\eta)'\,d\rho - \int_0^R \frac{(m^2 + c\rho^2)}{\rho}\eta^2\,d\rho = 0$$

(potrei integrare su $[\varepsilon, R]$ e poi $\varepsilon \to 0^+$ —)

$$\underbrace{\Big[\eta(\rho\eta')\Big]_0^R}_{\text{vale zero}} - \int_0^R \eta'(\rho\eta')\,d\rho - m^2\int_0^R \frac{\eta^2}{\rho}\,d\rho - c\int_0^R \rho\,\eta^2\,d\rho = 0$$

vale zero: se $\rho = 0$ OK.
se $\rho = R$ ho $\underline{\eta(R) = 0}$
(per la cond.)

$$-\int_0^R \rho(\eta')^2\,d\rho - m^2\int_0^R \frac{\eta^2}{\rho}\,d\rho = c\int_0^R \rho\,\eta^2\,d\rho \Rightarrow \boxed{c < 0} \;!!$$

(se integro tra ε e R $\Rightarrow$ mi avanzo $\varepsilon\eta(\varepsilon)\,\eta'(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$)

TORNO ALL'EQ. IN ρ:

$$\rho^2\eta''(\rho) + \rho\,\eta'(\rho) - (m^2 + c\rho^2)\,\eta(\rho) = 0$$

Pongo $\boxed{\eta(\rho) = \hat{\eta}(\sqrt{-c}\,\rho)}$ $\quad (r = \sqrt{-c}\,\rho)$

$$\Rightarrow \quad \eta'(\rho) = \sqrt{-c}\,\hat{\eta}'(\sqrt{-c}\,\rho) \qquad \eta''(\rho) = -c\,\hat{\eta}''(\sqrt{-c}\,\rho) \quad \Rightarrow$$

$$-c\rho^2\,\hat{\eta}''(\sqrt{-c}\,\rho) + \sqrt{-c}\,\rho\,\hat{\eta}'(\sqrt{-c}\,\rho) - \left(m^2 - (-c\rho^2)\right)\hat{\eta}(\sqrt{-c}\,\rho) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\hat{C}_2) \quad \boxed{\begin{array}{l} r^2\,\hat{\eta}''(r) + r\,\hat{\eta}'(r) - (m^2 - r^2)\,\hat{\eta}(r) = 0 \\ \hat{\eta}(\sqrt{-c}\,R) = 0 \end{array}}$$

Per studiare $(\hat{C}_2)$ uso le serie di potenze

$$\hat{\eta}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

$$\hat{\eta}'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n r^{n-1}$$

$$\hat{\eta}''(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) r^{n-2}$$

IMPONGO L'EQUAZIONE:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n n(n-1) r^n + a_n n r^n - m^2 a_n r^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n^2 - m^2) r^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} r^n = 0$$

$n = n+2 \rightarrow \sum_{n=2} a_{n-2} r^n$

$$a_0(-m^2) r^0 + a_1(1 - m^2) r + \sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n(n^2 - m^2) + a_{n-2}\right) r^n = 0$$

$\Leftrightarrow$ Devono valere

$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & m^2 a_0 = 0 \\ (ii) & (1 - m^2) a_1 = 0 \\ (iii) & a_n (n^2 - m^2) = -a_{n-2} \qquad \forall n \geq 2 \end{array}}$$

Tutto dipende da questo intero $m \geq 0$

Vari casi

$\boxed{m = 0} \Rightarrow$ a_0 è libero (i) è verificata

$a_1 = 0 \Leftarrow (ii)$

$$(iii) \Leftrightarrow \quad \boxed{a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} \qquad \forall n \geq 2 \qquad (R)}$$

da $a_1 = 0$ e (R) $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$ dispari

a_n con n pari sono univocamente determinati da (R)

$\boxed{m=1}$ $a_0 = 0$ a_1 è libero e

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2-1} \qquad (R)$$

$\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$ pari ; a_n è determinato da a_1 e da (R) $\forall n$ dispari

$\boxed{m \geq 2 \,..}$ supponiamo $\underline{m \text{ pari}}$. $\boxed{a_0 = a_1 = 0}$

Riscrivo la (iii)

$$(n^2 - m^2)a_n = -a_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

Se metto $n = m$ in (iii) $\Rightarrow$ $0 = a_{m-2}$ $\Rightarrow$ tornando indietro $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n \leq m-2$ con n pari.

Se invece n è dispari $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = 0 \ \forall n \text{ dispari} \quad \text{perché}}$ $a_1 = 0$

e $\forall n$ dispari $n \geq 3$ ho $a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{n^2-m^2}$ $\leftarrow \neq 0$ (n dispari)

DUNQUE SE $\boxed{m \geq 2 \quad \text{PARI}}$ $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$ dispari, $a_n = 0$ $\forall n$ pari, $n < m$

$\underline{a_m \text{ è libero}}$ e $\forall n > m$ con n pari a_n è determinato da

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2-m^2} \qquad \forall n > m \quad n \text{ pari}$$

Nello stesso modo si può vedere che se $m \geq 2$, DISPARI

$\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$ pari, $a_n = 0$ $\forall n$ dispari $n < m$, a_m è libero

e

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2-m^2} \qquad \forall n > m \quad n \text{ dispari}$$

Possiamo dire entrambe le formule considerando a_{m+2h} dove $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$ è fissato e $h \in \mathbb{N}$ $h \geq 0$. Su a_{m+2h} posso scrivere la relazione ricorsiva:

$$a_{m+2h+2} = \frac{-a_{m+2h}}{(m+2h+2)^2 - m^2} = \frac{-a_{m+2h}}{(m+2h+2-m)(m+2h+2+m)} =$$

$$\boxed{(R) \quad a_{m+2h+2} = \frac{-a_{m+2h}}{4\,(h+1)\,(m+h+1)}}$$

a_m è assegnato

$a_n = 0$ se $n \neq m+2h$ $h \geq 0$

VEDIAMO qualche valore di a_{m+2h}

$h = 0$ $\quad \alpha = a_m$ è dato,

$h = 1$ ($h = 0$ in (R)) $\quad a_{m+2} = \frac{-a_m}{4\,(1)\,(m+1)} = \frac{-\alpha}{4 \quad m+1}$

$h = 2$ ($h = 1$ in (R)) $\quad a_{m+4} = \frac{-a_{m+2}}{4 \cdot 2 \; (m+2)} = \frac{\alpha}{4^2 \cdot 2 \; (m+1)(m+2)}$

$h = 3$ ($h = 2$ in (R)) $\quad a_{m+6} = \frac{-a_{m+4}}{4 \cdot 3 \; (m+3)} = \frac{-\alpha}{4^3 \cdot 2 \cdot 3 \; (m+1)(m+2)(m+3)}$

$\vdots$

$$\rightarrow a_{m+2h} = \frac{(-1)^h \alpha}{4^h\, h!\, (m+1)\cdots(m+h)} = \frac{(-1)^h \alpha \; m!}{4^h\, h! \; (m+h)!}$$

si può effettivamente dimostrare per induzione

$$\Rightarrow \hat{M}(r) = \alpha \sum_{h=0}^{\infty} \frac{m!\,(-1)^h\, r^{m+2h}}{4^h\, h!\,(m+h)!} = \alpha\, m!\, r^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!\,(m+h)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2h}$$

Def. Se $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 0$ chiamo $J_m(r)$ la funzione sopra con $\alpha = \frac{1}{m!}$

$$\Rightarrow \boxed{J_m(r) = r^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!\,(m+h)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2h}}$$

(questa serie ha raggio di convergenza $+\infty$, si vede facilmente)

J_m si chiama funzione di Bessel m-esimo

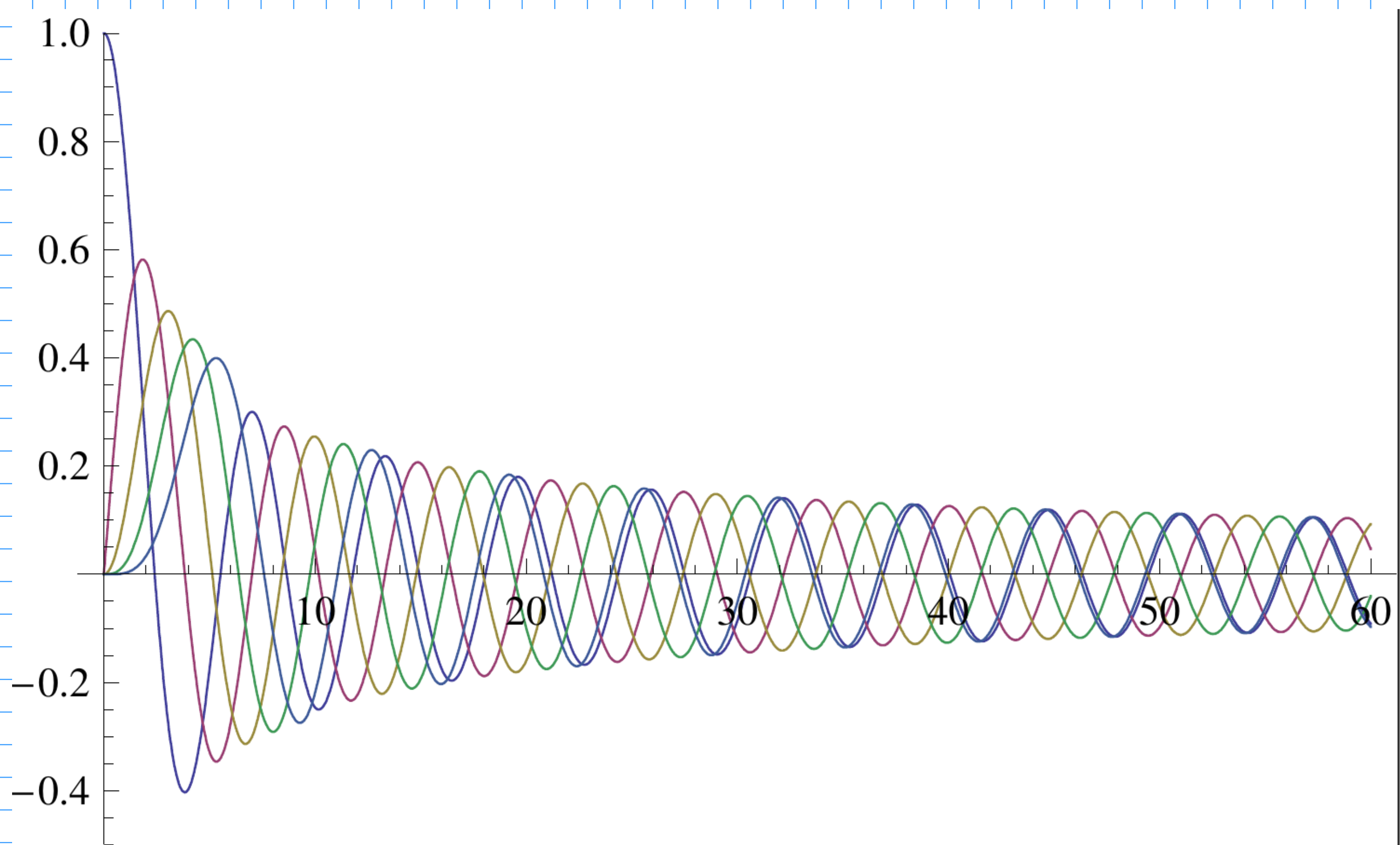
J_m risolve l'eq. $r^2 J_m'' + r J_m' - (m - r^2) J_m = 0$

$J_0(0) = 1 \quad J_m(0) = 0$ se $m \geq 1$

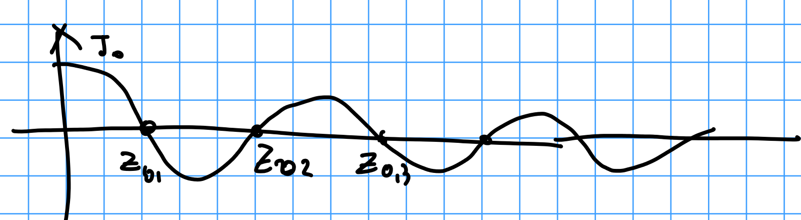
$J_1'(0) \neq \phi \quad J_m'(0) = 0 \quad \forall m \geq 2$

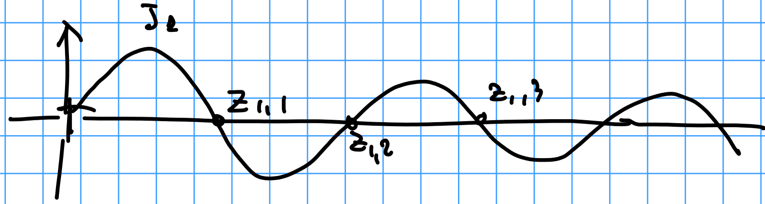
$J_m(0) = J_m'(0) = \dots \; J_m^{(m-1)}(0) = 0$

SI PUÒ DIMOSTRARE che le J_m sono fatte come nell'immagine.



- OGNI J_m ha una successione di zeri $z_{m,k} > 0$





e così via

Torniamo alla $\hat{\eta}$: Dato $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$

$$(\hat{C}_2) \quad \boxed{\begin{array}{l} r^2 \hat{\eta}''(r) + r\hat{\eta}'(r) - (m^2 - r^2)\hat{\eta}(r) = 0 \\ \hat{\eta}(\sqrt{-c}\,R) = 0 \end{array}}$$

Dato m $\hat{\eta}$ deve essere J_m e deve succedere che $J_m(\sqrt{-c}\,R) = 0$

DUNQUE $\sqrt{-c}\,R$ deve essere uno zero di J_m

$\sqrt{-c}\,R = z_{m,k}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$

$$c = \boxed{c_{m,k} := -\left(\frac{z_{m,k}}{R}\right)^2} \quad \text{(negativo)}$$

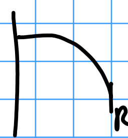
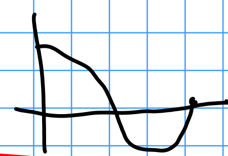
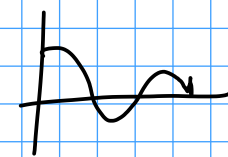
$z_{m,k}$ = k-esimo zero di J_m

A questo punto possiamo tornare indietro e trovare le soluzioni tipo variabili separabili di (E.C) su B_R.

Dati $m \geq 0$ $k \geq 1$ (interi) risulta definito $c_{m,k}$ come sopra

$$\eta(\rho) = \eta_{m,k}(\rho) = \alpha J_m\left(\sqrt{-c_{m,k}}\,\rho\right) = \boxed{\alpha J_m\left(\frac{z_{m,k}}{R}\rho\right)}$$

(parte radiale)

$m=0$ $k=1$ 
$m=0$ $k=2$ 
$m=0$ $k=3$ 

<u>Poi</u> prendo $\boxed{\xi_m(\theta) = A\cos(m\theta+\varphi)}$ (parte angolare)

$m=0$ $\quad \psi_{m,k}(\rho,\theta) = \psi_{0,k}(\rho,\theta) = A J_0\left(\frac{z_{0,k}}{R}\rho\right)$

<u>$m=1$</u> $\quad \psi_{1,k}(\rho,\theta) = A\cos(\theta+\varphi)\, J_1\left(\frac{z_{1,k}}{R}\rho\right)$

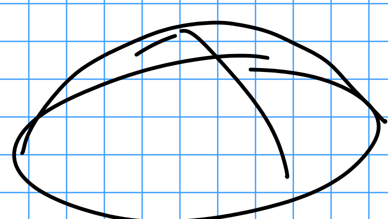
<u>$m=2$</u> $\quad \psi_{2,k}(\rho,\theta) = A\cos(2\theta+\varphi)\, J_2\left(\frac{z_{2,k}}{R}\rho\right)$

$\vdots$

nel complesso

$$\boxed{u_{m,k}(t,x,y) = e^{-\left(\frac{z_{m,k}}{R}\right)^2 t}\cos(m\theta)\, J_m\left(\frac{z_{m,k}}{R}\rho\right)}$$

se fisso t



$m=0$

$m=1$

HO TROVATO UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI "SPECIALI"

— Se volessi risolvere il problema generale ??

$$(E.C.)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & (x,y)\in B_R \quad t>0 \\ u(x,y,t)=0 \text{ se } (x,y)\in\partial B_R \\ u(x,y,0)=u_0(x,y) \text{ assegnata} \end{cases}$$

verificato da $u_{m,k}$

SI SCOPRE CHE le funzioni che abbiamo trovato

$$\boxed{\Psi_{m,k}(x,y) = \cos(m\theta)\, J_m\left(\frac{z_{m,k}}{R}\rho\right)}$$

(PARTE SPAZIALE)

hanno "le stesse proprietà dei seni e coseni rispetto a Fourier"

CIOÈ se $u_0(x,y)$ una f.ne generica. ($u_0: B_R \to \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \quad u_0 \underset{L^2}{=} \sum_{\substack{k\geq 1\\ m\geq 0}} c_{m,k}\,\Psi_{mk}$$

(con $c_{m,k}$ che si possono scrivere..)

Allora la sol. dell'(E.C) si può scrivere:

$$(*) \quad \boxed{u(x,y,t) = \sum_{\substack{m\geq 0\\ k\geq 1}} c_{m,k}\, e^{-\left(\frac{z_{m,k}}{R}\right)^2 t} \cos(m\theta)\, J_m\left(\frac{z_{m,k}}{R}\rho\right)}$$

OSS. Se fossimo nell'intervallo i seni $S_m(x) = \sin(m\omega_0 x)$ sono soluzione di

$$\boxed{S_m'' = -m^2 S_m \qquad S_m(0)=S_m(L)=}$$

Questa proprietà è l'analogo di

$$\begin{cases} \Delta\psi = -k^2\psi \\ \psi = 0 \text{ su } \partial B_R \end{cases}$$

E si vede anche che $u(x,y,t) \xrightarrow{L^2} u_0(x,y)$ se $t\to 0^+$