Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 49 30/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Visto: serie di F. per funzioni a energia finita: VERSIONE COMPLESSA

- Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ misurabile T periodica, $\int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty$

allora si ha $f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ $\quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$

e cioè $\lim_{k \to +\infty} \int_0^T \left| f(t) - \sum_{n=-k}^{k} c_k e^{in k \omega t} \right|^2 dt = 0$

dove $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$ (i soliti)

- INOLTRE (PARSEVAL)

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

VERSIONE REALE Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica con energia finita

IN QUESTO CASO $c_{-n} = \overline{c_n}$ e se $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{a_n}{2} - \frac{i}{2} b_n$ se $n \geq 1$

($\Leftrightarrow$ $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n$ $b_n = -2 \operatorname{Im} c_n$) allora

$$f(t) \underset{L^2}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

CIOÈ

$$\lim_{K\to\infty} \int_0^T \left(f(t) - a_0 - \sum_{n=1}^{K} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)^2 dt = 0$$

dove $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$, $\overset{n\geq 1}{a_n} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

- INOLTRE

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 =$$

$$a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n}|^2 + |c_n|^2 = a_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 =$$

$$a_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2}$$

ANALOGAMENTE Se : $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ f misurabile

$\int_0^L f^2 dx < +\infty$ Allora posso scrivere

$$f \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_0 x)$$

(stesso senso della sopra)

$$f \underset{L^2}{=} v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_0 x) \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{L}$$

(u_n, v_n i soliti)

(si passa da $\tilde{f}$ definita in modo dispari/pari su $[-L, L]$)

- INOLTRE

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$$

TORNIAMO ALL' EQUAZIONE DEL CALORE

LA PRENDO ZERO

$$(E.C)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(+ f(x,t)\right) & 0 \le x \le L \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Si è visto che posso scrivere

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\omega_0^2 t} u_{0,n} \sin(n\omega_0 x)$$

dove $u_{0,n}$ sono i coeff. di Fourier di u_0 : (nei seni) $u_{0,n} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\omega_0 x)\,dx$

Si è anche visto che la $u(x,t)$ scritta sopra è C^∞ su $\{0 \le x \le L,\ t > 0\}$ e verifica la III° riga di (E.C) $(t>0)$ ($u(\cdot,t)$ si annulla in $x=0$ e $x=L$)

- Abbiamo anche visto che se $\sum |u_{0,n}| < +\infty \Rightarrow$ c'è convergenza uniforme del "profilo" $u(\cdot,t)$ a u_0 cioè

$$\max_{0 \le x \le L} |u(x,t) - u_0(x)| \xrightarrow{t\to 0} 0$$

SE INVECE prendo $u_0 \in L^2$ (a energia finita) non posso dire che $u(x,t) \xrightarrow{t\to 0^+} u_0$. Posso però dire che $u(\cdot,t) \xrightarrow{L^2} u_0$ per $t \to 0^+$, cioè

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^L (u(x,t) - u_0(x))^2\,dx = 0$$

QUESTO LO POSSO RICAVARE NEL SEGUENTE MODO:

$$u(x,t) - u_0(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\omega_0^2 t} u_{0,n} \sin(n\omega_0 t) - \sum_{n=1}^{\infty} u_{0,n} \sin(n\omega_0 t) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\left(e^{-n^2\omega_0^2 t}-1\right)u_{0,n}} \sin(n\omega_0 t) \qquad (t>0)$$

$$\frac{1}{L}\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^2}^2 = (\text{per Parseval}) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(e^{-n^2\omega_0^2 t}-1\right)^2 u_{0,n}^2}_{a_n(t)}$$ ← serie numerica che dipende dal parametro t

se $n \in \mathbb{N}$ è fissato $\quad a_n(t) \to 0 \quad$ (perché $e^{-n^2\omega_0^2 t} \to 1$)

POSSO PASSARE AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI SERIE?

SI se esiste una serie b_n tale che $|a_n(t)| \leq b_n$ e $\sum b_n < +\infty$.

QUESTA b_n la trovo prendendo $b_n = u_{0,n}^2$. INFATTI

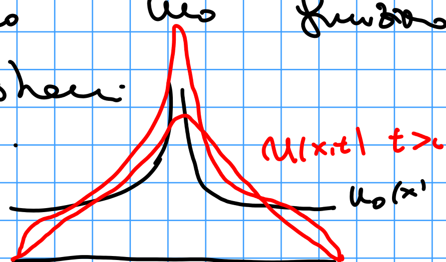
se $u_0 \in L^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{0,n}^2 = \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)^2\,dx < +\infty$

e si ha $\quad |a_n(t)| = (\underbrace{e^{-n^2\omega_0^2 t}-1}_{<1})^2 u_{0,n}^2 \leq u_{0,n}^2 = b_n$

$\Rightarrow$ TORNA e se passo al limite per $t \to 0^+ \Rightarrow$

$$\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$$

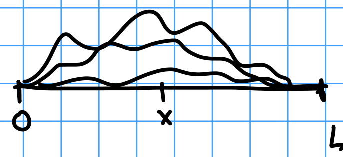
DUNQUE POSSO PRENDERE COME DATO INIZIALE u_0 una funzione anche discontinua e non nulla agli estremi:



$u(x,t) \xrightarrow{t\to 0} u_0(x)$ in energia

EQ. CALORE

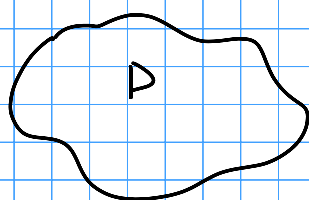
IN DUE DIM.



Se mi metto in più variabili spaziali, PER ESEMPIO CON DUE VARIBILI SPAZIALI HO IL SEGUENTE PROBLEMA

$D \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare (PIASTRA ?)

+



Voglio studiare come si evolve la temperatura nei punti di D al variare del tempo. Ho quindi una $u(x,y,t)$ con $(x,y) \in D$ e $t \geq 0$. SI VEDE L'EQ. CHE REGOLA IL FENOMENO È:

SORGENTE DI CALORE

$$(E.C.) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,y,t) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ u(x,y,t) = 0 \quad \text{se } (x,y) \in \partial D \quad t > 0 \end{cases}$$

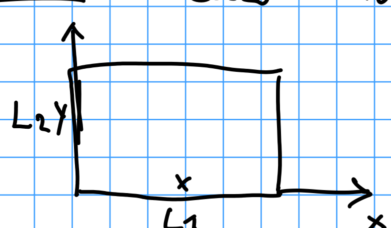
$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{IN } \mathbb{R}^3)$$

← CONDIZIONE ZERO AL BORDO

[RISPETTO AL CASO UNIDIMENSIONALE HO IN PIÙ IL PROBLEMA DI DESCRIVERE IL DOMINIO]

CASO SEMPLICE $D = [0, L_1] \times [0, L_2]$ (rettangolo)

IDEA Cerco $u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$



$\omega_1 = \dfrac{\pi}{L_1}$ $\omega_2 = \dfrac{\pi}{L_2}$

IDEA 0 se ho una $u(x,y)$, $(x,y) \in D =$

$\Rightarrow$ la posso sviluppare (due volte) nei seni :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin(n\omega_1 x)$$

$$\text{e ogni } b_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin(m\omega_2 y) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)}$$

e si vede che $\boxed{c_{n,m} = \dfrac{4}{L_1 L_2} \displaystyle\int_D u(x,y) \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)\, dx dy}$

TORNANDO A (E.C.). Prendo i dati iniziali $u_0(x,y)$ e lo scrivo come sopra $u_0(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{0,n,m} \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$

e cerco $u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$

se si può derivare per serie $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u'_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) (-n^2\omega_1^2) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin(n\omega_1 x)(-m^2\omega_2^2)\sin(m\omega_2 y)$$

Se impongo l'equazione trovo : (sto prendendo $f(x,y,t) = 0$)

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(u'_{n,m}(t) + (n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2) u_{n,m}(t)\right) \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u'_{n,m}(t) + (n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2) u_{n,m} = 0 \qquad \forall n, \forall m \underset{\geq 1}{\in} \mathbb{N}$$

$$u_{n,m}(t) = e^{-(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2)t} \, u_{0,n,m}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-(n^2\omega_1^2 + m^2\omega_2^2)t} \, u_{0,n,m} \sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)}$$

Come visto nel caso UNIDIM si ha: se fisso $T>0$

$\Rightarrow$ u è C^∞ su $D \times [T, +\infty[$, u verifica l'equazione

e $u(x,y,t) = 0$ se $(x,y) \in \partial D$ $\forall t \geq T$

$\Rightarrow$ VALE L'EQ. QUI
VALE LA COND AL BORDO $\forall t > 0$

- Se $t \to 0$ $\quad u(\cdot,\cdot,t) \xrightarrow{\text{UNIF}} u_0$

  se $\sum_{n,m} |u_{0,n,m}| < +\infty$

  $u(\cdot,\cdot,t) \xrightarrow{\text{in energia}} u_0$ se u_0 ha energia finita

---

CASO in cui D è un cerchio:

$$D = B_R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & (u : B_R \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \quad (x,y) \in B_R & (u_0 \text{ assegnata}) \\ u(x,y,t) = 0 \quad \text{se } (x,y) \in \partial B_R,\ t > 0 & \end{cases}$$

IDEA (separazione delle variabili) 1 Cerco le u di questa forma

$$u(x,y,t) = v(t)\, w(x,y)$$

IMPONGO L'EQUAZIONE

$$v'(t)\,w(x,y) = v(t)\,\Delta w(x,y)$$

DIVIDO (supponiamo si possa...) per $v\,w$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{v'(t)}{v(t)}}_{\substack{\uparrow\\ \text{dipende solo da } t}} = \underbrace{\frac{\Delta w(x,y)}{w(x,y)}}_{\substack{\uparrow\\ \text{dipende solo da } (x,y)}} \iff$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{Esiste } c \in \mathbb{R} \text{ tale che} & \\ \dfrac{v'(t)}{v(t)} = c & (A) \\ \dfrac{\Delta w(x,y)}{w(x,y)} = c & (B)\end{array}}$$

(A) $\quad v'(t) = c\,v(t) \iff v(t) = e^{ct}\,v(0)$

(B) $\begin{cases} \Delta w = c\,w \\ w = 0 \text{ su } S_R = \partial B_R \end{cases}$ $\qquad w : B_R \to \mathbb{R} \qquad w = 0$ su ∂B_R

Per studiare (B) passo in coordinate polari:

$$\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$$

e prendo $\Psi(\rho,\theta) = w(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = w\circ\phi$

devo capire che equazione verifica Ψ (sapendo che w verifica (B))

USO LA DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\circ\phi\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\circ\phi\right)\sin\theta$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\circ\phi\right)(-\rho\sin\theta) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\circ\phi\right)\rho\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\circ\phi\right)\cos^2\theta + \left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\circ\phi}\right)\cos\theta\sin\theta + \qquad \leftarrow \text{quando sommo}$$

$$\left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\circ\phi}\right)\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\circ\phi\right)\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\circ\phi\right)\rho^2\sin^2\theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\circ\phi\right)\cancel{(\rho^2\sin\theta\cos\theta)} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\circ\phi\right)\rho\cos\theta +$$

$$\left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\circ\phi}\right)(-\rho^2)\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\circ\phi\right)\rho^2\cos^2\theta - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\circ\phi\right)\rho\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=\Delta w\circ\phi-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta-\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta}_{\frac{\partial\psi}{\partial\rho}}$$

$$\Delta w(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

L'equazione (B) si trasforma in

$$(B_1)\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\psi}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=c\,\psi\\ \psi(R,\theta)=0\quad\forall\,\theta\in[0,2\pi]\ ,\ \psi(\rho,0)=\psi(\rho,2\pi)\end{cases}$$

IDEA anche ψ lo scrivo come $\psi(\rho,\theta)=\eta(\rho)\xi(\theta)$

(cerco le soluzioni di questo tipo)

Se impongo (B_1) $\Rightarrow$

$$\eta''(\rho)\xi(\theta)+\frac{1}{\rho}\eta'(\rho)\xi(\theta)+\frac{1}{\rho^2}\eta(\rho)\xi''(\theta)-c\,\eta(\rho)\xi(\theta)=0$$

divido per $\eta(\rho)\xi(\theta)$ $\Rightarrow$

$$\frac{\eta''(\rho)}{\eta(\rho)}+\frac{1}{\rho}\frac{\eta'(\rho)}{\eta(\rho)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\xi''(\theta)}{\xi(\theta)}-c=0$$

MOLTIPLICO per ρ^2

$$\underbrace{\rho^2\frac{\eta''(\rho)}{\eta(\rho)}+\rho\frac{\eta'(\rho)}{\eta(\rho)}-c\rho^2}_{\text{dipende solo da }\rho}=\underbrace{-\frac{\xi''(\theta)}{\xi(\theta)}}_{\text{dipende solo da }\theta}=K$$

Esiste un'altra costante K tale che cioè

(C_1) $\quad \xi''(\theta)=-K\xi(\theta)$ $\qquad$ ξ è 2π periodica

(C_2) $\quad \rho^2\eta''+\rho\,\eta'-(K+c\rho^2)\,\eta=0$ $\qquad$ $\eta(R)=0$

(sono equazioni differenziali ORDINARIE

VEDO LA (C1)

$\begin{cases} K<0 \to \text{esponenziale} & \underline{\text{NO!}} \text{ (perché non è periodica)} \\ K=0 \text{ costante} & \\ \boxed{K>0} \Rightarrow K = m^2 \text{ e } \xi(\theta) = A\cos(m\theta+\varphi) & \end{cases}$

$\Rightarrow$ m è intero (per la periodicità)

DUNQUE (C1) IMPLICA $K = m^2$ con $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 0$

e $\xi(\theta) = A\cos(m\theta+\varphi)$ con $A \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

VEDO (C2) che è diventata

$$\rho^2\eta''(\rho) + \rho\eta'(\rho) - m^2\eta + c\rho^2\eta = 0 \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq R \\ \eta(R) = 0 \end{array}$$

CONTINUIAMO DOMANI