Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 48 25/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

SERIE DI FOURIER per funzioni a energia finita

" Dato f chiamo energia di f $\int_a^b f^2(x)\,dx$ "

Considero il caso di funzioni periodiche e definisco ($T>0$)

$$L^2_T = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) : f \text{ è } T\text{-periodica},\ f \text{ è misurabile},\ \underbrace{\int_0^T |f(t)|^2\,dt < +\infty}_{\text{energia di } f} \right\}$$

(se sono a valori reali $|f|^2 = f^2$ ...)

FATTO • L^2_T è uno spazio vettoriale (f, g hanno energia finita $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ ha energia finita)

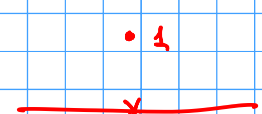
• L'energia è associata a una norma $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2\,dt}$

Si può dire che $\|\cdot\|_2$ è effettivamente una norma PURCHÉ

prop. di una norma
$$\begin{cases} \|f\| \geq 0, \quad \|f\| = 0 \iff f = 0 \\ \|t f\| = |t|\,\|f\| \\ \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{cases}$$

$\|f\|_2 = 0 \iff \int_0^T |f(t)|^2\,dt = 0$

$\Rightarrow f(t) = 0$ per q.o. t



Devo introdurre in L^2_T "la convenzione": se $f(t)$ è eguale a $g(t)$ per quasi ogni t, ALLORA f e g SONO LA STESSA COSA (a rigore introduco in L^2_T la relazione di equiv. $f \sim g$ se $f(t) = g(t)$ q.o. t.

CON QUESTA CONVENZIONE L^2_T è uno spazio normato.

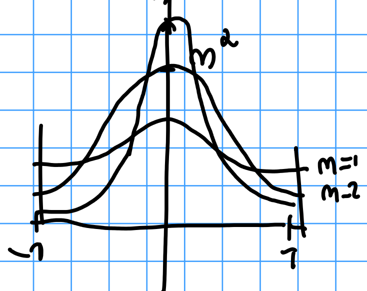
IN L^2_T è definita una convergenza (in L^2 / in energia)

$$f_n \xrightarrow{2} f \quad \text{se e solo se} \quad \|f_n - f\|_2 \to 0$$

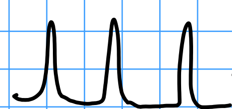
(energia della differenza $\to 0$)

ESEMPIO Sia $\alpha > 0$ FISSATO. Dato n intero considero

$f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha}{1+n^2x^2}$



Posso estendere a tutto $\mathbb{R}$ in modo periodico di periodo $T=1$



$f_n \in L^2$ perché continua su $[-1, 1]$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^2 f_n(x)^2\,dx = \int_{-1}^{1} f_n(x)^2\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{n^\alpha}{(1+n^2x^2)}\right)^2 dx =$$

$$n^{2\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+(nx)^2)^2} = \qquad y = nx \quad dy = n\,dx \qquad dx = \frac{dy}{n}$$

$$\frac{n^{2\alpha}}{n}\int_{-n}^{n}\frac{dy}{(1+y^2)^2} = n^{2\alpha-1}\int_{-n}^{n}\frac{dy}{(1+y^2)^2}$$

Se $n \to \infty$ $\displaystyle\int_{-n}^{n}\frac{dy}{(1+y^2)^2} \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^2} \in \mathbb{R}$

Se $\alpha < \frac{1}{2}$ $\quad n^{2\alpha-1} \to 0$

DUNQUE Se $\alpha < \dfrac{1}{2}$ $\quad f_n \xrightarrow{L^2_T} 0$ NONOSTANTE $f_n(0) \to +\infty$

f_n TENDE A ZERO IN ENERGIA

LA CONVERGENZA IN ENERGIA (è una cosa "in medio")
NON IMPLICA LA CONVERGENZA PUNTUALE
(se $f_n \to f$ in L^2 $\not\Rightarrow$ $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x$)

FATTO La norma $\| \ \|_2$ proviene da un prodotto scalare:

Def. Date $f, g \in L^2_T$ definisco

im $\mathbb{R}$ il coniugato non serve

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} \, dt$$

SI VEDE CHE $\langle \cdot , \cdot \rangle$ è bilineare e

$$\langle f, f \rangle = \| f \|_2^2$$

- Da questo segue che $\| \ \|_2$ è una norma (si usa la diseg. di Schwartz)
- INOLTRE IN L^2_T c'è una nozione di "ortogonalità"

TORNIAMO ALLE SERIE DI F.

CASO COMPLESSO Avevo considerato le funzioni

$$e_n(t) = e^{in\omega t} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

e visto che $\int_0^T e_n \overline{e_m} \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T & \text{se } n = m \end{cases}$

Le funzioni e_n sono tra loro ortogonali $(n \neq m)$

$$\| e_n \|_2 = \sqrt{T}$$

$\rightsquigarrow$ $\frac{e_n}{\sqrt{T}}$ sono una base ortonormale (e_n base)

La serie di Fourier consiste nel esprimere una generica f come combinazione lineare (infinita) degli e_n

$$f = \sum c_n e_n \rightsquigarrow c_n = \frac{1}{T} \langle f, e_n \rangle$$

$$\left(\begin{array}{c} f = \sum c'_n \frac{e_n}{\sqrt{T}} \quad \Rightarrow \quad c'_n = \langle f, \frac{e_n}{\sqrt{T}} \rangle \\ \parallel \\ \sum \langle f, \frac{e_n}{\sqrt{T}} \rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e_n = \sum \frac{1}{T} \langle f, e_n \rangle e_n \end{array} \right)$$

COSA POSSIAMO DIRE DELLA SERIE DI FOURIER SE PARTO DA $f \in L^2_T$??
(i c_n sono ben definiti!!)

$\boxed{\text{RISPOSTA}}$ Se $\boxed{f \in L^2_T}$ (f ha energia finita) ALLORA

$$(S_K =) \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n \xrightarrow[K \to \infty]{L^2_T} f \iff \left\| \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n - f \right\|_2 \xrightarrow{K \to \infty} 0$$

$$\left(\sum_{n=-K}^{K} c_n e^{in\omega t} \right) \qquad \Updownarrow$$

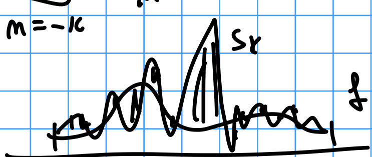
$$\underbrace{\int_0^T \left(\sum_{n=-K}^{K} c_n e^{in\omega x} - f(x) \right)^2 dx \xrightarrow{K \to \infty} 0}$$

$\simeq$ Se f ha energia finita $\Rightarrow$

f è somma L^2 della sua serie di Fourier

LO INDICO COSÌ $\quad f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

$$S_K(x) = \sum_{n=-K}^{K} c_n e^{in\omega x} \to f(x) \qquad \left(S_K(x) \overset{\text{NON È DETTO}}{\to} f(x) \right)$$



Supponiamo di sapere che $f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

$S_K = \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n$ so che $S_K \xrightarrow{L^2} f$, cioè $\| S_K - f \|_2^2 \to 0$

Vediamo come si scrive $\| S_K - f \|_2^2 = \langle S_K - f, S_K - f \rangle =$

$\langle S_K, S_K \rangle - \langle f, S_K \rangle - \langle S_K, f \rangle + \langle f, f \rangle =$

$$\langle S_K, S_K\rangle - \langle f, S_K\rangle - \overline{\langle f, S_K\rangle} + \|f\|_2^2 =$$

$$\boxed{\langle S_K, S_K\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f, S_K\rangle + \|f\|_2^2} = \otimes$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}\\ &\langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle},\\ &\langle f, cg\rangle = \bar{c}\langle f,g\rangle\end{aligned}}$$

$$\langle S_K, S_K\rangle = \left\langle \sum_{m=-K}^{K} c_m e_m, \sum_{m=-K}^{K} c_m e_m \right\rangle = \sum_{m,m=-K}^{K} \langle c_m e_m, c_m e_m\rangle$$

$$= \sum_{m,m=-K}^{K} c_m \overline{c_m} \underbrace{\langle e_m, e_m\rangle}_{\substack{\text{fa } 0 \text{ se } m \neq m \\ \text{fa } T \text{ se } m = m}} = \sum_{m=-K}^{K} c_m \overline{c_n}\, T = \boxed{T\sum_{m=-K}^{K} |c_n|^2 = \langle S_K, S_K\rangle}$$

$$\langle f, S_K\rangle = \left\langle f, \sum_{m=-K}^{K} c_m e_m \right\rangle = \sum_{m=-K}^{K} \langle f, c_m e_m\rangle =$$

$$\sum_{m=-K}^{K} \overline{c_m} \underbrace{\langle f, e_m\rangle}_{T c_m} = \sum_{-K}^{K} \overline{c_m} c_m T = \boxed{T\sum_{m=-K}^{K} |c_m|^2 = \langle f, S_K\rangle}$$

DUNQUE

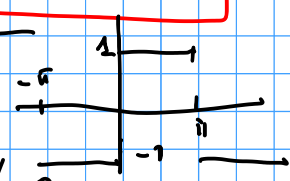
$$0 \leftarrow \|S_K - f\|_2^2 = T\sum_{-K}^{K} |c_m|^2 - 2T\sum_{-K}^{K} |c_m|^2 + \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \underbrace{T\sum_{m=-K}^{K} |c_m|^2}$$

Ne segue se $f \in L^2_T$ (e quindi $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$) $\Rightarrow$

$$\boxed{T\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^T |f(t)|^2}$$

EGUAGLIANZA DI PARSEVAL

ESEMPIO ONDA QUADRA



$T = 2\pi \quad \omega = 1$

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-imt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)\, e^{-imt}\, dt + \int_0^{\pi} (1)\, e^{-imt}\, dt\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \left(-e^{imt} + e^{-imt}\right) dt\right) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} -\sin(mt)\, dt = \left(\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$\frac{i}{\pi}\left[\frac{\cos(mt)}{m}\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{(-1)^n - 1}{\pi m}\, i = c_m}$$

APPLICO PARCEVAL

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt = 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 \Leftrightarrow 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2$$

$$|c_n|^2 = \frac{((-1)^n - 1)^2}{\pi^2 n^2} = \frac{1 + 1 - 2(-1)^n}{\pi^2 n^2} = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ DISPARI}}} \frac{4}{\pi^2 n^2} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ DISPARI}}} \frac{8}{\pi^2 n^2} =$$

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$