Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

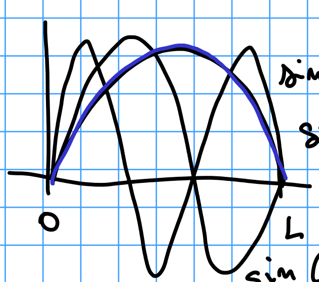
Lezione 47   24/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Considero $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ $\quad L>0$ (con ipotesi che metteremo dopo)

VORREI TROVARE DEGLI SVILUPPI DEL TIPO

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_0 x) \quad (1) \qquad \Big/ \qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(n\omega_0 x) \quad (2)$$



$$\boxed{\omega_0=\frac{\pi}{L}}$$

così $\sin(\omega_0 x)$ non si annulla x $x\in\,]0,L[$

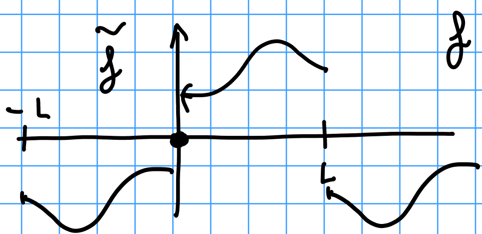
$\left(\omega_0 x=\frac{\pi}{L}x\in\,]0,\pi[\right)$

POSSO FARE UNA COSA DEL GENERE? CHI DEVO PRENDERE COME u_n/v_n?

<u>IDEA</u> per il caso (1)   Data $f:[0,L]\to\mathbb{R}$, la estendo su $[-L,L]$ ponendo

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\in\,]0,L] \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -f(-x) & \text{se } x\in[-L,0[\end{cases} \qquad (-x\in[0,L])$$

$\tilde f$ è DISPARI PER COSTRUZIONE



Poi estendo $\tilde f$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$ periodico

Sviluppo $\hat{f}$ secondo Fourier con periodo $2L$ $\rightarrow$ $\omega = \frac{2\pi}{2L} = \omega_0$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)$$

(a_n, b_n coeff. di F. per $\tilde{f}$). DATO CHE $\tilde{f}$ È DISPARI (per come l'ho definito) $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n \geq 0$ $\Rightarrow$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{ovunque sia regolare...})$$

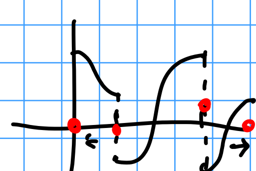
e $b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \sin(n\omega_0 x)\,dx = \quad (T = 2L)$

$$\frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \sin(n\omega_0 x)\,dx = \boxed{\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega_0 x)\,dx =: \alpha_n}$$

Naturalmente se mi limito a $x \in [0, L]$ ho trovato (se tutto va bene)

$$(\text{F.S.S}) \quad \left[\begin{array}{l} \underset{\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}}{f(x)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\omega_0 x) \qquad \forall x \in [0, L] \\ \text{dove} \quad \alpha_n = \displaystyle\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega_0 x) \end{array} \right.$$

<u>Teorema</u> Suppon. f sia regolare a tratti su $[0, L]$, cioè se $\exists\ 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_K = L$ tali che $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ è C^1 e ha derivata limitata in $]x_i, x_{i+1}[$



(ALLORA $\forall x_i$ $\exists$ $f(x_i^+)$ e $f(x_i^-)$ $\leftarrow$ $\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ x \to x_0^-}} f(x)$ — IN $0 = x_0$ $\exists$ SOLO $f(x_0^+)$ e in $x_K = L$ $\exists$ SOLO $f(x_K^-)$)

Allora vale la formula (F.S.S) dove devo mettere al posto di $f(x)$ $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ se $x \in]0, L[$.

Negli estremi devo mettere 0 $\left(\frac{\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)}{2} \right)$

IN MANIERA ANALOGA: dato $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ considero

$$\hat{f} : [-L, L] \to \mathbb{R} \qquad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le L \\ f(-x) & -L \le x \le 0 \end{cases}$$

$\hat{f}$ è PARI, per come è definito. La estendo a $\mathbb{R}$ in modo 2L-periodico. Sviluppo $\hat{f}$ secondo Fourier ($b_n = 0$, ci sono solo gli a_n) IN DEFINITIVA HO:

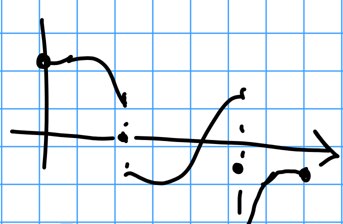
TEOREMA Se f è regolare a tratti $\Rightarrow$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega_0 x) \qquad x \in]0, L[$$

dove $a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n \omega_0 x)\,dx$

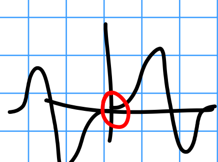
se $x = 0$ ci metto solo $f(0^+)$ $\quad (\hat{f}(0^-) = \hat{f}(0^+) = f(0^+))$

se $x = L$ ci metto solo $f(L^-)$



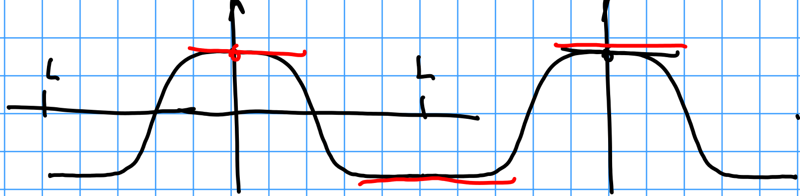
INOLTRE: ① se $\tilde{f}$ è C^1 $\Rightarrow$ la conv. della serie nei seni è uniforme

$\Leftrightarrow$ f è C^1 su $[0, L]$, e $f(0) = f(L) = 0$



② $\hat{f}$ è C^1 $\Rightarrow$ la convergenza della serie in soli coseni è uniforme

se f è C^1 su $[0, L]$ e se $f'(0) = f'(L) = 0$



OSS. OLTRE ALLA REGOLARITÀ IN $]0,L[$ serve un comportamento in $0, L$ della f

- per fare lo sviluppo in seni $f(0)=f(L)=0$
- " " " " $f'(0)=f'(L)=0$

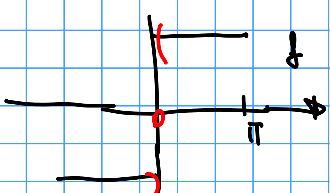
ESEMPIO $f(x) = 1$ su $[0,\pi]$ (regolare a tratti)

• Lo voglio sviluppare in soli seni : $\omega_0 = \frac{\pi}{\pi} = 1$

$$1 = f(x) = \sum_{1}^{\infty} u_n \sin(nx) \qquad u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(-(-1)^n+1\right) =$$

$$u_n = \frac{2}{\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{2k+1} & \text{se } n = 2k+1 \text{ (dispari)} \end{cases}$$

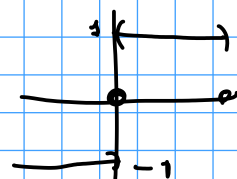


($\tilde{f}$ è l'onda quadra) $\Rightarrow$

NON POSSO AVERE CONV. UNIF. ALTRIMENTI $1=f(0)=0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} \qquad 0 < x < \pi$$

se $x=0$, $x=\pi$ ci devo mettere zero



• Se invece voglio sviluppare f in soli coseni ho una risposta ovvia

$$1 = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(nx) \qquad \text{con } v_0 = 1,\ v_n = 0$$

(e si vede facilmente che $\mathcal{D}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx$ e $\mathcal{D}_n = \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx$)

#

<u>Teorema</u> Supponiamo che $(u_n)_{n\geq 1}$ / $(v_n)_{n\geq 0}$ sia una successione di numeri reali. $L>0$ dato, $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$

(a) Se $\sum_1^{\infty} |u_n| < +\infty$ / $\sum_0^{\infty} |v_n| < +\infty \Rightarrow$

la serie $\sum_1^{\infty} u_n \sin(n\omega_0 x)$ / $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(n\omega_0 x)$

CONVERGE UNIF. su $[0,L]$ A UNA FUNZIONE

f / g CONTINUA e tale che $f(0)=f(L)=0$ / NIENTE DA DIRE,

(b) Se $\sum_1^{\infty} n|u_n| < +\infty$ / $\sum_0^{\infty} n|v_n| < +\infty \Rightarrow$ la f / g

è C^1, e f' / g' È SOMMA UNIFORME DELLA SERIE DELLE DERIVATE:

$$\sum_1^{\infty} n\omega_0 u_n \cos(n\omega_0 x) \quad / \quad \sum_1^{\infty} -n\omega_0 v_n \sin(n\omega_0 x)$$

INOLTRE ---- / $g'(0)=g'(L)=0$

(c) PIÙ IN GENERALE se $\sum_1^{\infty} n^k |u_n| < +\infty$ / $\sum_1^{\infty} n^k |v_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ f è di classe C^k / g è di classe C^k,

$f^{(h)}$ / $g^{(h)}$ = serie delle derivate h-ESIME $h=0,1,\dots,k$

+ altre proprietà in $0, L$ che dipendono dal fatto h $\begin{cases}\text{PARI}\\ \text{DISPARI}\end{cases}$

SI DEDUCONO DA QUELLI FATTI PER LE FUNZIONI PERIODICHE PASSANDO ATTRAVERSO $\tilde{f}$ / $\hat{f}$

<u>ESEMPIO</u>

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

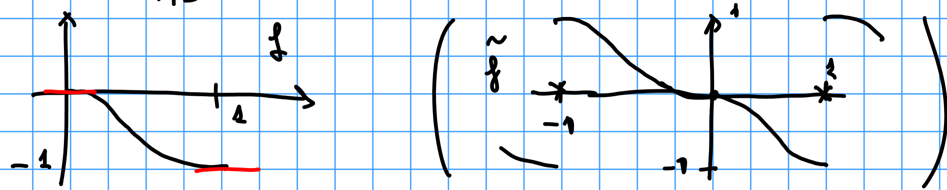
Voglio lo sviluppo di f in seni / coseni su $[0,1]$

$\rightsquigarrow$ $\omega_0 = \frac{\pi}{1} = \pi$, (cioè cerco

b_n ? a_n ?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(n\pi x)$$

Nota :



f è regolare a tratti

$$f'(x) = 6x^2 - 6x \qquad f''(x) = 12x - 6 \qquad f'''(x) = 12$$

Calcoliamo gli u_n (vari integrali per parti)

$$u_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\left[\underset{f(0)=0 \quad f(1)=-1}{f(x)\,\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}}\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 f'(x)\cos(n\pi x)\,dx =$$

$$\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\underbrace{\left[f'(x)\,\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0 \quad \sin(n\pi)=\sin(0)=0} - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 f''(x)\sin(n\pi x)\,dx =$$

$$\frac{2}{n\pi}(-1)^n - \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\underset{f''(1)=6 \quad f''(0)=-6}{f''(x)\,\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}}\right]_0^1 - \frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^1 f'''(x)\cos(n\pi x)\,dx =$$

$$\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}\left(6(-1)^n + 6\right) - \frac{2}{n^3\pi^3}\underbrace{\left[12\,\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} =$$

$$\boxed{\frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{12\,(1+(-1)^n)}{n^3\pi^3} = u_n}$$

Dato che f è reg. a tratti $\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x) \qquad 0 \le x < 1$$

se $x=1$ la serie $\to 0$

NOTA $\sum_{1}^{\infty} |u_n| = +\infty$ perché contiene $\frac{2(-1)^n}{n\pi} \to \left|\ \ \right| = \frac{2}{n\pi}$ $\quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

TORNA CON IL FATTO CHE in $x=1$ $f(x) \neq 0$

(se avessimo $\sum |u_n| < +\infty \Rightarrow f(0) = f(1) = 0$)

② Sviluppo f nei coseni:

$$v_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2)\,dx = \left[2\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$v_0 = -\frac{1}{2}$.

$m \geq 1$
$$v_m = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos(m\pi x)\,dx = \underbrace{2\left[f(x)\frac{\sin(m\pi x)}{m\pi}\right]_0^1}_{=0 \;\; \sin(m\pi)=\sin(0)=0} - \frac{2}{m\pi}\int_0^1 f'(x)\sin(m\pi x)\,dx =$$

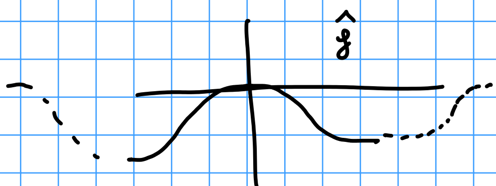
$$-\frac{2}{m\pi}\underbrace{\left[f'(x)\frac{-\cos(m\pi x)}{m\pi}\right]_0^1}_{f'(0)=f'(1)=0} - \frac{2}{m^2\pi^2}\int_0^1 f''(x)\cos(m\pi x)\,dx =$$

$$0 - \frac{2}{m^2\pi^2}\underbrace{\left[f''(x)\frac{\sin(m\pi x)}{m\pi}\right]_0^1}_{=0 \text{ per i seni}} + \frac{2}{m^3\pi^3}\int_0^1 f'''(x)\sin(m\pi x)\,dx =$$

$$\frac{2}{m^3\pi^3}\left[12\,\frac{-\cos(m\pi x)}{m\pi}\right]_0^1 = -\frac{24}{m^4\pi^4}\left[\cos(m\pi x)\right]_0^1 = \frac{-24}{m^4\pi^4}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$v_m = \frac{24(1-(-1)^n)}{m^4\pi^4}$$ ← MOLTO PIÙ SOMMABILI DEGLI u_m

- $\sum |v_m| < +\infty$ ($\Rightarrow$ la serie converge unif. e $\hat{f}$ è continua)



- $\sum m|v_m| < +\infty$ $\quad m|v_m| \simeq \frac{1}{m^3}$ $\Rightarrow$ la serie delle derivate conv. unif e $f'(0) = f'(1) = 0$ e

$$f'(x) = -\pi\sum_{m=1}^{\infty} m\, v_m \sin(m\pi x)$$

- $\sum m^2|v_m| < +\infty$ $\quad m^2|v_m| \simeq \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ la serie delle derivate II^e converge uniformemente e

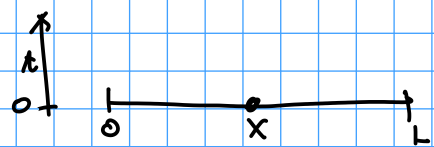
$$f''(x) = -\pi^2\sum_{m=1}^{\infty} m^2 v_m \cos(m\pi x)$$

#

EQUAZIONE DEL CALORE

INCOGNITA $\quad u(x,t) \quad x\in[0,L] \quad t\geq 0$

$u(x,t)$ è la temperatura all'istante t nel punto x di "una sbarra lineare"



C'è la seguente equazione che (in opportune ipotesi) regola l'evoluzione di $u(x,t) : [0,L]\times[0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$

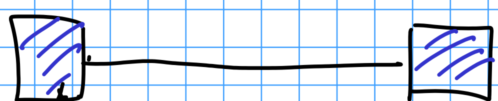
lo prendo $=1$ $\quad$ sorgente di calore (nel punto x, all'istante t)

$$(E.C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x} + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x\in[0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t\geq 0 \end{cases}$$

$u_0 : [0,L]\to\mathbb{R}$ assegnato

$=$ u_0 distribuzione della temperatura all'istante $t=0$

agli estremi della "sbarra" la temperatura è tenuta a zero



Le condizioni al bordo potrebbero essere diverse (...)

Voglio sapere se esiste (se è unica) com'è fatta la $u(x,t)$

IDEA: Cerco $u(t,x)$ come una serie di Fourier nello spazio con coeff. che dipendono dal tempo. PIÙ PRECISAMENTE (dato che ho la "condizione nulla agli estremi") CERCO

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin(n\omega_0 x) \qquad \left(\omega_0 = \frac{\pi}{L}\right)$$

FACCIO FINTA CHE LA u SCRITTA SOPRA ESISTA e faccio dei calcoli (per ora non giustificati) per capire chi sono gli u_n.

- Supponiamo di poter derivare per serie sia rispetto a t (1 volta) che rispetto a x (2 volte)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} u_m'(t) \sin(n\omega_0 x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = \sum u_m(t)\left(-m^2\omega_0^2\right)\sin(n\omega_0 x)$$

- Suppongo che f ammetta uno sviluppo in soli seni con coeff. dipendenti dal tempo:

$$f(x,t) = \sum_1^{\infty} b_m(t) \sin(n\omega_0 x) \quad \left(\Rightarrow \underbrace{b_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin(m\omega_0 x)\,dx}\right)$$

SE IMPONGO L'EQUAZIONE TROVO

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_1^{\infty}\left(u_m'(t) + m^2\omega_0^2 u_m(t)\right)\sin(m\omega_0 x) = \sum b_n(t)\sin(m\omega_0 x)$$

$$\overset{(?)}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{u_m'(t) + m^2\omega_0^2 u_m(t) = b_m(t) \qquad \forall m \geq 1}$$

($\forall m$) ho eq. diff ordinaria in t, che so risolvere

$$\text{☆} \quad u_m(t) = e^{-m^2\omega_0^2 t}\left(\underline{u_m(0)} + \int_0^t e^{m^2\omega_0^2\tau}\,\underline{b_m(\tau)}\,d\tau\right)$$

e $u_m(0)$ sono i coeff di Fourier nei seni di $u_0(x)$ cioè

$$u_m(0) = u_{m,0} = \underbrace{\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(m\omega_0 x)\,dx}$$ (sempre se u_0 è abbastanza buona)

HO TROVATO CHI SONO gli $\underline{\underline{u_m(t)}}$ per $t \geq 0$

→ POSSO COSTRUIRE $u(x,t)$ e deve verificare che tutti i passaggi fatti sono leciti. FACCIO LA VERIFICA NEL CASO $f(x,t) = 0$ ($\Rightarrow b_m(t) = 0$). DUNQUE

$$u_m(t) = e^{-m^2\omega_0^2 t}\, u_{m,0}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_1^{\infty} u_{m,0}\, e^{-m^2\omega_0^2 t} \sin(m\omega_0 x)} \leftarrow \text{VERIFICA (E.C.) !!}$$

• DIM. CHE $u(x,t)$ converge TOTALMENTE su $\{x\in[0,L]\ t\geq T\}$ se $\underline{T>0}$ è fissato. CIOÈ se

$$M_n = \sup_{\substack{0\leq x\leq L\\ t\geq T}} \left| u_{n,0}\, e^{-n^2\omega_0^2 t} \sin(n\omega_0 x)\right| \Rightarrow \sum_1^\infty M_n < +\infty$$

(se questo è vero $\Rightarrow$ CONV. UNIF. SU $[0,L]\times[T,+\infty[$)

OSS Se u_0 ha un minimo di regolarità $\Rightarrow u_{0,n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(se $u_0(x)$ è integrabile $\Rightarrow u_{0,n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$) IN PARTICOLARE $|u_{n,0}| \leq$ costante)

Valuto $M_n \leq |u_{n,0}|\, e^{-n^2\omega_0^2 T} \cdot 1 \leq \underbrace{\text{cost.}\ e^{-n^2\omega_0^2 T}}_{\text{SOMMABILE}}$

$$\sum M_n < +\infty \Longleftarrow \boxed{\sum_1 e^{-n^2\omega_0^2 T} < +\infty}$$

DUNQUE $\underline{u(t,x)\ \text{esiste}}$ ed è continua su ogni $[0,L]\times[T,+\infty[$

$\Rightarrow$ esiste ed è $\underline{\text{continua su } [0,L]\times]0,+\infty[}$

• $u(t,x)$ è derivabile in t e si può scambiare $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\sum$

Per vederlo basta far vedere che la serie delle derivate in "t" è totalmente convergente ($t\geq T$) (poi APPLICO I TEOREMI $\Rightarrow$ ..)

$$M_{1,n} = \sup_{\substack{0\leq x\leq L\\ t\geq T}} \left| u_{0,n}\left(-n^2\omega_0^2\, e^{-n^2\omega_0^2 t}\right)\sin(n\omega_0 x)\right|$$

$$\leq |u_{0,n}|\, n^2\omega_0^2\, e^{-n^2\omega_0^2 T}\cdot 1 \leq \text{cost}\ n^2 e^{-n^2\omega_0^2 T}$$

ANCHE $M_{1,n}$ è sommabile perché $\sum n^2 e^{-n^2\omega_0^2 T} < +\infty$

(VINCE L'ESPONENZIALE !)

DAI TEOREMI $\Rightarrow u$ è derivabile in t $\forall t>0$

(dato che $T>0$ è arbitrario) e si può derivare per serie

NELLO STESSO MODO POTREI DIM CHE u è C^∞ rispetto a t e si può derivare per serie quante volte si vuole

- Stessi ragionamenti rispetto a x:

$\frac{\partial u}{\partial x}$ esiste ed è uguale alla serie delle derivate

INFATTI, $t > T$ ho la conv. totale della serie delle derivate in x su $[0, L] \times [T, +\infty[$, cioè

$$\sup_{\substack{0 \le x \le L \\ t \ge T}} \left| u_{0,n} e^{-n^2 \omega_0^2 t} n \omega_0 \cos(n \omega_0 x) \right| \le \underbrace{\text{cost } n\, e^{-n^2 \omega_0^2 T}}_{\text{SOMMABILE}}$$

ANALOGAMENTE DIMOSTRO CHE ESISTONO TUTTE LE

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ . . e sono uguali alla serie delle derivate

- DA QUANTO SOPRA $\Rightarrow$ (sono leciti i passaggi fatti all'inizio)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Dalla conv. totale fatta sopra $\Rightarrow$ $u(0,t) = u(L,t) = 0$ $\forall t \ge T$ ($\Rightarrow \forall t > 0$) dato che la conv. TOTALE ($\Rightarrow$ UNIF) CONSERVA la condizione zero al bordo

- RIMANE LA CONDIZIONE INIZIALE $u(x,0) = u_0(x)$

La validità di questa condizione dipende da quanto è buona u_0

NOTA Fino ad ora u_0 può anche essere discontinua (purché abbia lo sviluppo sopra). IN OGNI CASO u è C^∞ su $[0, L] \times]0, +\infty[$)

SE METTO L'IPOTESI $\boxed{\sum_{1}^{\infty} |u_{n,0}| < +\infty}$ ($\Rightarrow u_0$ CONTINUA e nulla in 0 e L)

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \| u(\cdot, t) - u_0 \|_{\infty, [0,L]} = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\max_{0 \le x \le L} | u(x,t) - u_0(x) | \longrightarrow 0 \quad (\text{in part. } \forall x \; u(x,t) \to u_0(x))$$

IN EFFETTI se $x \in [0,L]$ $t>0$ ho

$$|u(x,t) - u_0(x)| = \left|\sum_1^{\infty} \left(u_{0n} e^{-n^2\omega_0^2 t} - u_{0n}\right) \sin(n\omega_0 x)\right| \leq$$

$$\sum_1^{\infty} |u_{0,n}| \left|e^{-n^2\omega_0^2 t} - 1\right| \Rightarrow \|u(\cdot,t) - u_0\|_\infty \leq \sum_1^{\infty} |u_{0,n}| \left|e^{-n^2\omega_0^2 t} - 1\right|$$

A QUESTO PUNTO DICO CHE

$$\sum_1^{\infty} \underbrace{|u_{0,n}| \left|e^{-n^2\omega_0^2 t} - 1\right|}_{\leq a_n} \longrightarrow 0 \quad \text{se } t \to 0^+$$

IN EFFETTI $\forall n$ vedo che $|u_{0,n}| \left|e^{-n^2\omega_0^2 t} - 1\right| \to 0$

SARÀ LO STESSO PER LA SERIE

PERCHÉ QUESTO SIA VERA MI SERVE UNA DIS. TIPO

IL TEOR. DI LEBESGUE : mi serve uno $a_n \geq 0$ con $\sum a_n < +\infty$

e tale che $|u_{0n}| \left|e^{-n^2\omega_0^2 t} - 1\right| \leq a_n \quad \forall t \in [0,1]$

BASTA PRENDERE $a_n = |u_{0,n}| \cdot 2.$ (VA BENE)

so che è sommabile

$$\Rightarrow \quad \sum (\ ) \xrightarrow{t \to 0} 0$$